

# **OPTICS SIM Руководство пользователя**

# Содержание

<b>Руководство пользователя.....</b>	<b>4</b>
Введение.....	4
Как использовать это руководство.....	4
Возможности программы.....	5
Интерфейс пользователя.....	5
Лента инструментов.....	6
Дерево проектов.....	7
Графическое окно.....	9
Импорт файлов GDS.....	12
Импорт GDS через опцию Открыть.....	12
Импорт GDS через опцию Добавить.....	13
Задание настроек решателя.....	13
Определение расчетной области и граничных условий.....	16
Задание материалов.....	20
Задание гауссовского источника.....	22
Способ построения сетки.....	23
Задание настроек сетки.....	23
Запуск расчета.....	25
Частотные мониторы.....	25
<b>Приложение - Теоретическое руководство.....</b>	<b>29</b>
Основные уравнения.....	29
Уравнения Максвелла.....	29
Уравнение Гельмгольца.....	31
Методы расчета.....	32
Метод распространения пучка (BPM).....	33
Метод конечных разностей в частотной области (FDFD).....	42

Метод конечных разностей во временной области (FDTD).....	51
Источники.....	56
Гауссов пучок.....	56
Настройки сетки.....	59
Результаты.....	60
Список литературы.....	61

# Руководство пользователя

## Введение

*OPTICS SIM предназначен для проведения оптического анализа или анализа элементов фотоники в приборостроении. Данный продукт разработан для решения ряда инженерных и научных задач:*

- Анализ и оптимизация компонентов
  - Волноводов и оптоволокна
  - Интегрально-оптических элементов связи
  - Устройств, управляющих излучением
  - Лазеров и фотодетекторов
- Моделирование и анализ фотонных интегральных схем в частотной и временной областях

Пользовательский интерфейс OPTICS SIM включает в себя следующие элементы:

- Препроцессор служит для препроцессинга данных, которые будут использоваться в моделировании.
- Менеджер расчетов позволяет пользователю управлять расчетами.
- Постпроцессор представляет ряд инструментов для постпроцессинга результатов.

Руководство пользователя представляет собой контекстно-зависимую справку по программному продукту OPTICS SIM и включает в себя подробные сведения о пользовательском интерфейсе программы, управлении файлами, описания определений граничных условий, настроек сетки, расчетов задач и анализ результатов.

Основные сведения об использованных физических моделях приведены в Приложении - Теоретическое руководство.

## Как использовать это руководство

В данном разделе представлено руководство пользователя программы OPTICS SIM. Здесь вы найдёте информацию о каждом элементе интерфейса, что позволит вам настроить вашу собственную задачу и получить исчерпывающую информацию о возможностях программы.

В разделе "Интерфейс" пользователя описан интерфейс программы так, как это выглядит, когда пользователь впервые открывает программу OPTICS SIM.

Далее в разделах "Препроцессинг", "Сетка", "Расчет", "Построцессинг" описаны действия, которые необходимо выполнить, чтобы настроить задачу, и описан функционал каждого элемента интерфейса.

## Возможности программы

*Программа предоставляет возможности для моделирования различных волноводов в интегральных системах. При этом можно учитывать различные граничные условия (учитывать периодичность, поглощение и т.д.), что позволяет сделать вашу модель приближенной к реальности. Модель можно анализировать во временной и в частотной областях.*

## Интерфейс пользователя

*В данном разделе представлено краткое руководство пользователя программы OPTICS SIM.*

При открытии программы на самой верхней панели инструментов находятся разделы **Файл** и **Справка**.

- **Файл** содержит опции
  - **Новый** для создания нового файла.
  - **Открыть** для открытия готового файла.
  - **Выход** для того, чтобы закрыть программу.
- **Справка>Документация OPTICS SIM** позволяет открыть интерактивную документацию для пользователя. В документации описаны, как математические аспекты моделирования и методов, лежащих в основе этого программного пакета, так и особенности интерфейса.

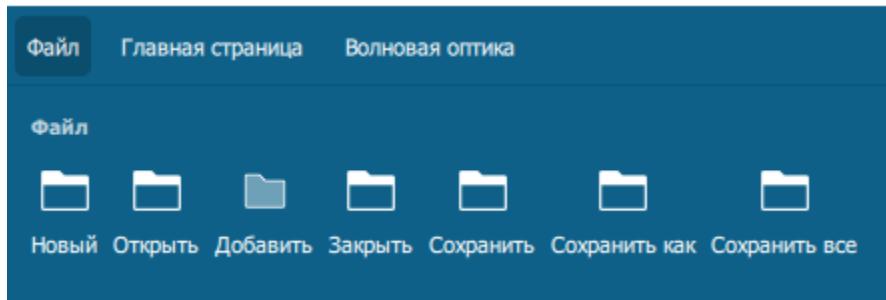
Далее наверху экрана расположена лента инструментов, слева дерево проектов, а большую часть экрана занимает графическая область.

Далее рассмотрим подробно каждую из областей: Ленту инструментов, Дерево проекта, Графическое окно.

## Лента инструментов

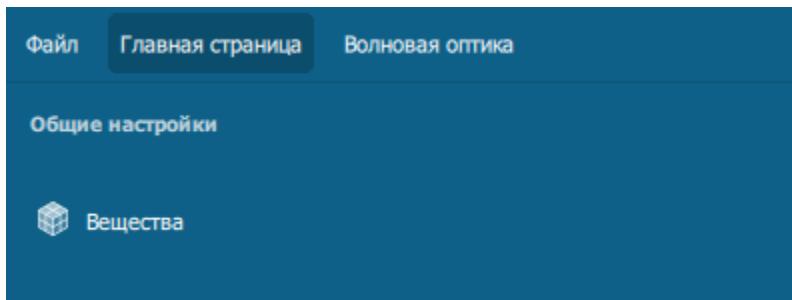
*Лента инструментов расположена сверху рабочей области и представляет собой набор инструментов необходимых для настройки задачи.*

Во вкладке **Файл** находятся инструменты необходимые для работы с файлами.

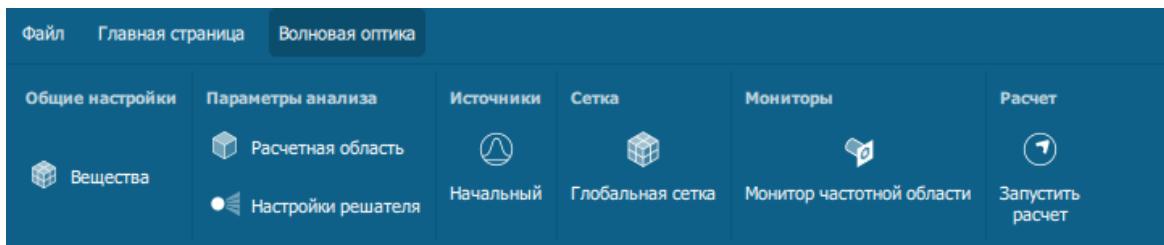


- **Новый** позволяет создать новый документ SMTDOC
- **Открыть** позволяет открывать файлы формата SMTDOC, GDS, JSON
- **Добавить** позволяет добавить файл формата GDS, JSON, если у пользователя создан документ
- **Закрыть** позволяет закрыть программу
- **Сохранить** позволяет сохранить текущий вариант файла
- **Сохранить как** позволяет сохранить текущий вариант файла в нужной директории
- **Сохранить все** позволяет сохранить текущий вариант файла

**Главная страница** содержит инструменты, которые пользователь чаще всех использует при работе с файлом.



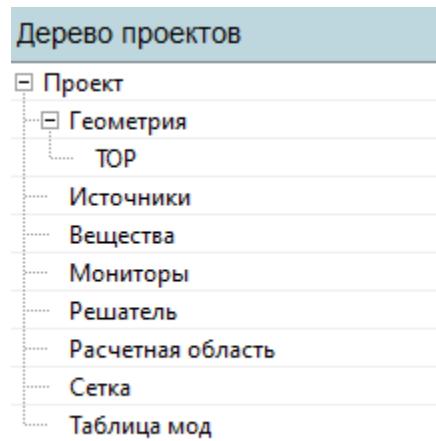
**Волновая оптика** содержит полный набор инструментов для постановки задачи.



- **Общие настройки** содержит кнопку **Вещества** для задания свойств материала.
- **Параметры анализа** содержит кнопку **Расчетная область** для задания размеров области и граничных условий, а также кнопку **Настройки решателя** для выбора метода решения.
- **Источники** содержит кнопку **Начальный** для задания источников.
- **Сетка** содержит кнопку **Глобальная сетка** для настройки сетки.
- **Мониторы** содержит кнопку **Монитор частотной области** для задания монитора, на котором будут отображаться результаты.
- **Расчет** содержит кнопку **Запустить расчет** для запуска расчета.

## Дерево проектов

В данном разделе описаны основные элементы дерева проектов. Стоит обратить внимание, что практически каждый пункт дерева проектов можно менять, кликнув на правую кнопку мыши. Тогда появятся дополнительные действия, которые также описаны в этом разделе.



- **Геометрия** содержит информацию о контуре, заданном в файле GDS. Название контура, находится в дополнительной ветке.
- **Источники** позволяет задавать источники для дальнейшего распространения. По правой кнопке мыши позволяет выполнить дополнительное действие **Добавить гауссов пучок**
- **Вещества** позволяет задавать материал волновода. По правой кнопке мыши позволяет выполнить дополнительное действие **Добавить материал**
- **Мониторы** собирают профиль поля на основе результатов моделирования в расчетной области. По правой кнопке мыши позволяет выполнить дополнительное действие **Добавить монитор**
- **Решатель** позволяет выбрать подходящий тип решателя. По правой кнопке мыши позволяет выполнить дополнительное действие **Изменить...**
- **Расчетная область** позволяет менять границы расчетной области и задавать граничные условия. По правой кнопке мыши позволяет выполнить дополнительные действия **Изменить..., Показать, Скрыть**
- **Сетка** позволяет задавать размеры сетки. По правой кнопке мыши позволяет выполнить дополнительные действия **Изменить...**

- **Таблица мод** предназначена для вывода таблицы со значениями собственных мод и информацией о каждой моде при частотном анализе. По правой кнопке мыши позволяет выполнить дополнительные действия **Изменить..., Показать, Скрыть**

**Прим.:**

Практически каждый пункт дерева модели дублируется в ленте инструментов. Выбор пользователя менять настройки через дерево модели или через ленту инструментов не влияет на функционал программы.

## Графическое окно

Большую часть экрана для пользователя занимает Графическая область. Изначально она пустая. По мере моделирования в ней отображается геометрия объекта, расчетная область, источники и результаты.



Наверху в центре находятся элементы управления графической областью.

**Изменить размер экрана** позволяет менять масштаб, чтобы сделать видимой всю

**Изменить в размер экрана**

Изменяет масштаб вида, чтобы сделать всю модель видимой.

модель.

**Панорамирование** позволяет перемещать изображение в графической

**Изменить в размер экрана**

Изменяет масштаб вида, чтобы сделать всю модель видимой.

области.

**Увеличить элемент вида** позволяет приблизить изображение до пределов области, заданной ограничивающей



**Увеличить элемент вида**

Увеличивает до выбранного размера, заданного ограничивающей рамкой.

рамкой.

**Увеличить/уменьшить вид** позволяет увеличивать или уменьшать изображение при перетаскивании указателя вверх или

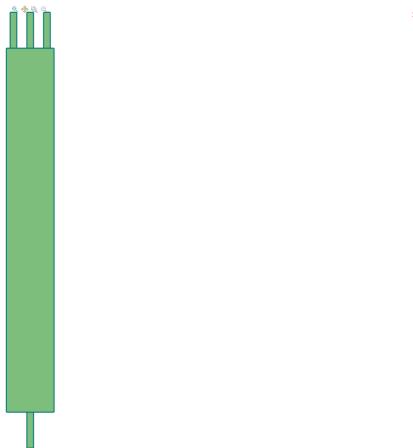


**Увеличить/уменьшить вид**

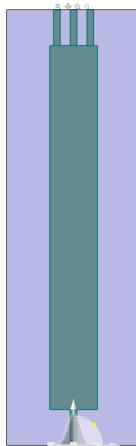
Увеличивает или уменьшает вид при перетаскивании указателя вверх или вниз.

ВНИЗ.

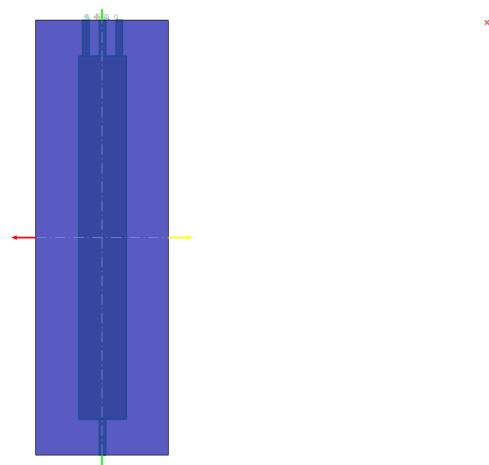
Графическое окно при отображении геометрии:



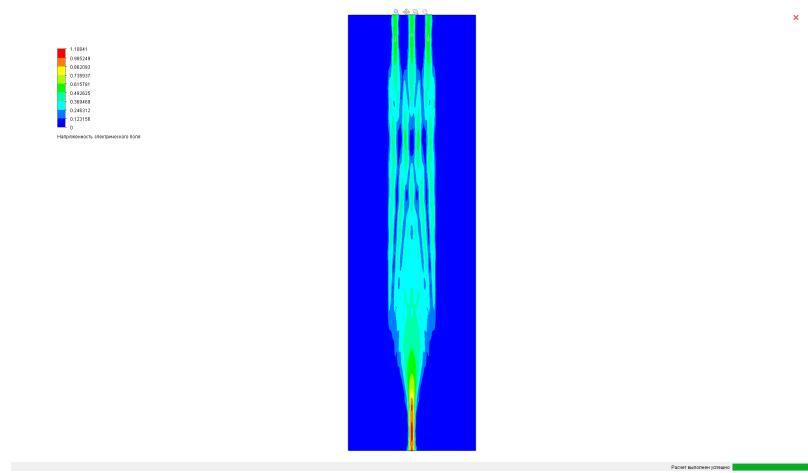
Графическое окно при отображении источников:



Графическое окно при отображении расчетной области:



Графическое окно при отображении результатов:



## Импорт файлов GDS

На данный момент программа позволяет работать с файлами формата GDS, JSON и SMTDOC.

В интегральных схемах для обмена данными чаще используют формат GDS. Данный формат описывает плоские геометрические формы, текстовые метки и иную информацию в иерархической форме. Как импортировать геометрию волновода из GDS файла в программе OPTICS SIM описано в подразделах этого топика.



### Прим.:

Предварительно у вас должен быть создан рабочий файл, в котором вы открываете GDS геометрию. Для создания рабочего файла необходимо в запущенной программе нажать **Файл > Новый**. В открывшемся окне **Сохранение** в поле **Имя файла** ввести имя нового файла формата SMTDOC. Выбрать папку для сохранения и нажать кнопку **Сохранить**.

Есть два способа импортировать GDS файл.

### Импорт GDS через опцию Открыть

Здесь описан первый способ импорта GDS-файлов:

1. На ленте инструментов нажать кнопку **Открыть**.
2. В появившемся окне **Открыть** переключить в списке в правом нижнем углу тип файла с Document(\*.smtdoc) на photonics file(\*.gds; \*.json), выбрать GDS-файл и нажать кнопку **Открыть**.
3. После загрузки файла на экране появится двумерная модель устройства и станет доступен интерфейс программы:
4. На данном этапе у нас есть модель формата GDS. Программа предлагает пользователю задать толщину слоя в разделе **Слои** слева. Нужно задать толщину слоя или оставить значение для толщины слоя по умолчанию. Нажать **Файл > Конвертировать в сборку**.
5. После конвертации в сборку, формат файла изменится на SMTDOC, на экране появится модель устройства и станет доступен весь интерфейс программы с деревом проекта слева.

## Импорт GDS через опцию Добавить

Здесь описан второй способ импорта GDS-файлов:

1. На ленте инструментов нажать кнопку **Добавить**.
2. В появившемся окне **Открыть** выбрать GDS-файл и нажать кнопку **Открыть**.
3. После загрузки файла на экране появится двумерная модель устройства и станет доступен интерфейс программы.

## Задание настроек решателя

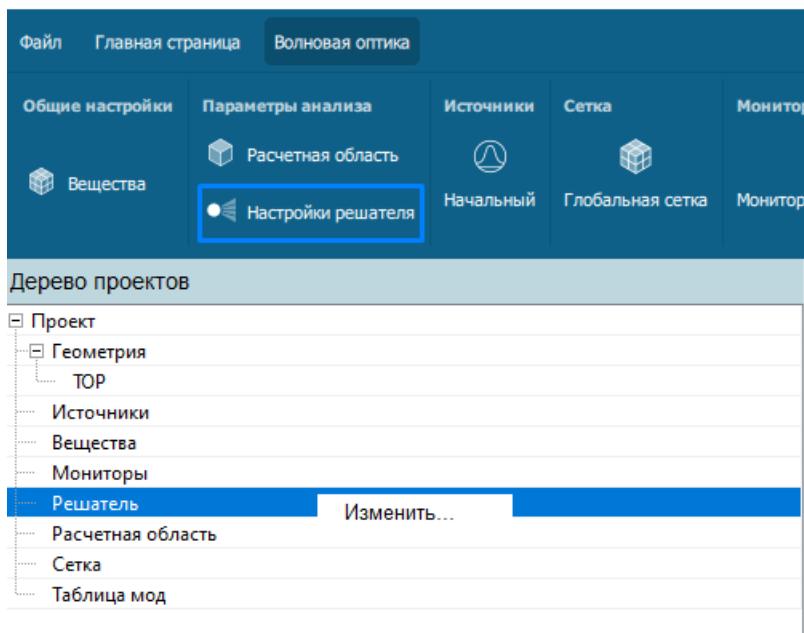
*В программе OPTICS SIM доступно несколько методов для решения задач из области оптики.*

Для доступа к настройкам решателя:

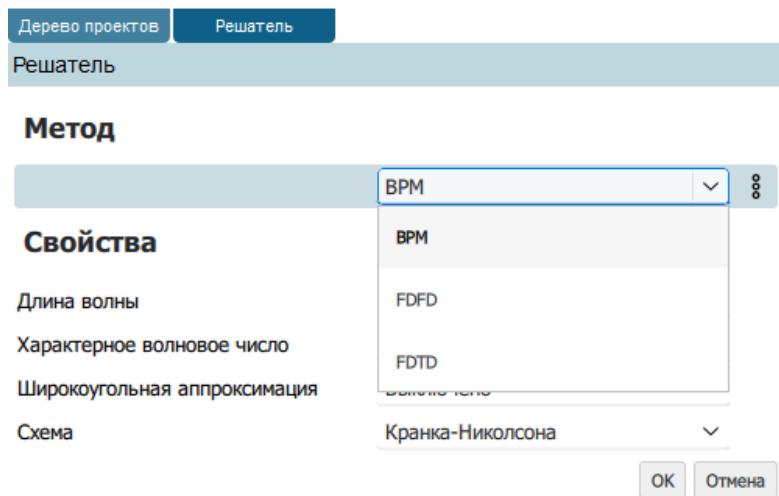
- нажать кнопку **Настройки решателя** на ленте инструментов во вкладке **Волновая оптика** ленты инструментов

либо

- в дереве проектов нажать правой кнопкой мыши в поле **Решатель** и из контекстного меню выбрать **Изменить...**:



Доступно несколько методов: **BPM** (Метод распространяющегося пучка), **FDFD** (Методы конечных разностей в частотной области), **FDTD** (Методы конечных разностей во временной



области).

**BPM** и **FDTD** позволяют промоделировать распространение волны в волноводе.

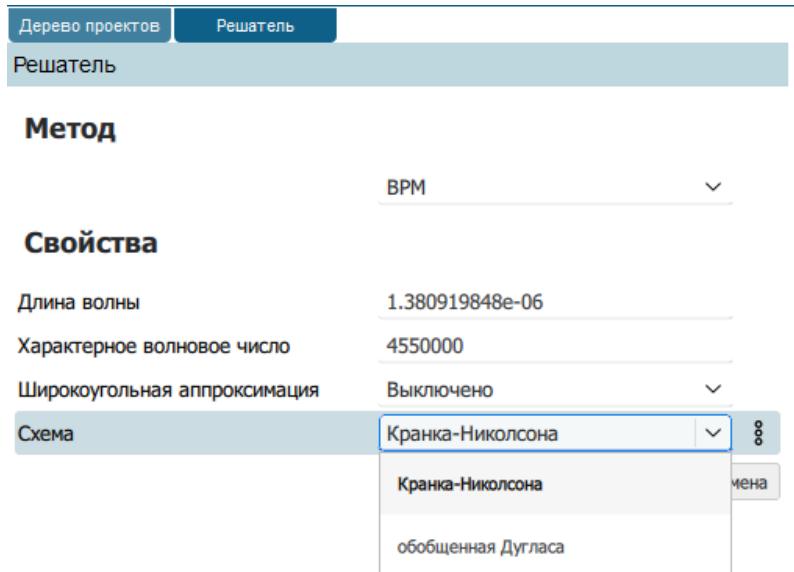
**FDFD** позволяет получить собственные моды волновода. В дальнейшем эти моды можно использовать в качестве источников наравне с гауссовым источником.

Каждый метод требует задания настроек собственных параметров.

Для **BPM** метода в разделе **Свойства** окна решатель **Решатель** содержатся следующие опции:

- **Длина волны:** Необходимо задать численное значение
- **Характерное волновое число:** Необходимо задать численное значение
- **Широкоугольная аппроксимация:** содержит опции Включено, Выключено

- **Схема** : Кранка Николсона, обобщенная Дугласа



Для **FDFD** метода в разделе **Свойства** окна решатель **Решатель** содержатся следующие опции:

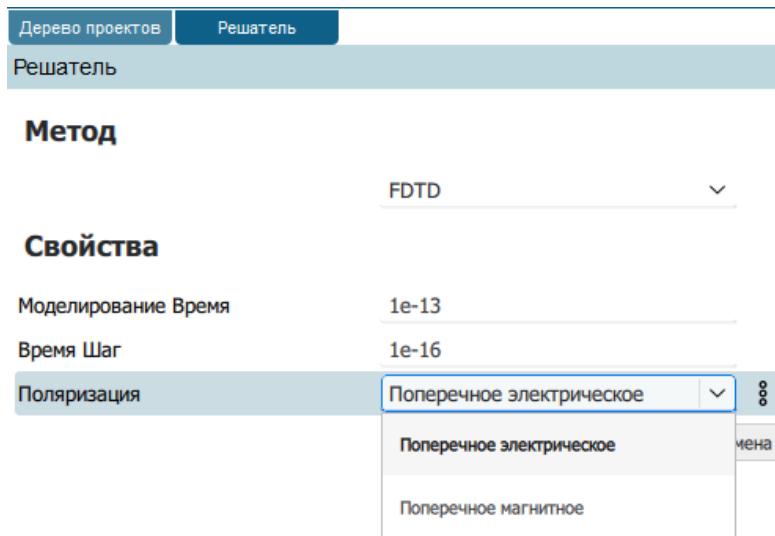
- **Длина волны**: Необходимо задать численное значение



Для **FDTD** метода в разделе **Свойства** окна решатель **Решатель** содержатся следующие опции:

- **Моделирование Время**: Необходимо задать численное значение. Задаем время моделирования.
- **Время Шаг**: Необходимо задать численное значение. Задаем значение шага по времени.

- **Поляризация:** Поперечное электрическое, Поперечное магнитное



## Определение расчетной области и граничных условий

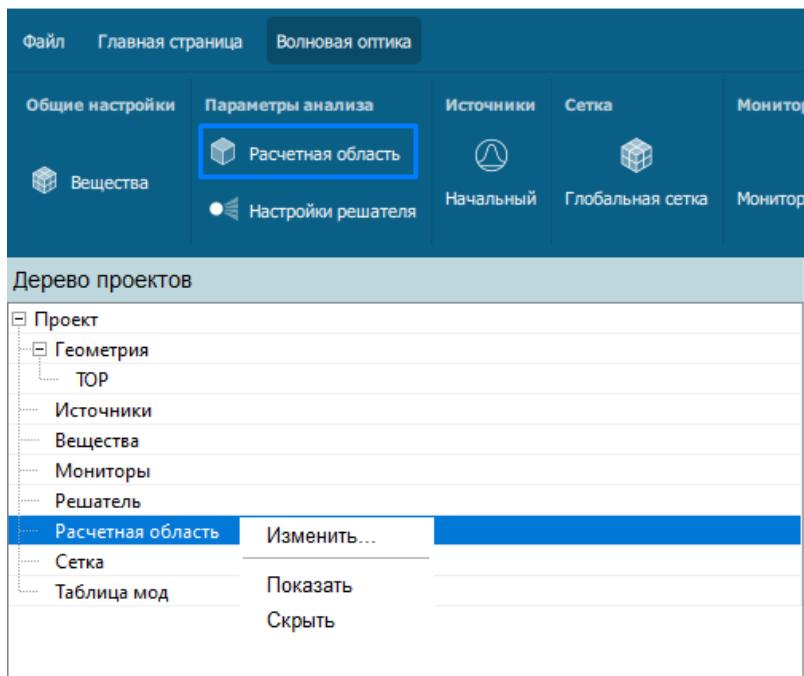
Функционал программы *OPTICS SIM* позволяет менять границы расчетной области в интерактивном режиме динамически с помощью стрелок-манипуляторов и задавать необходимые граничные условия.

Для доступа к настройкам расчетной области:

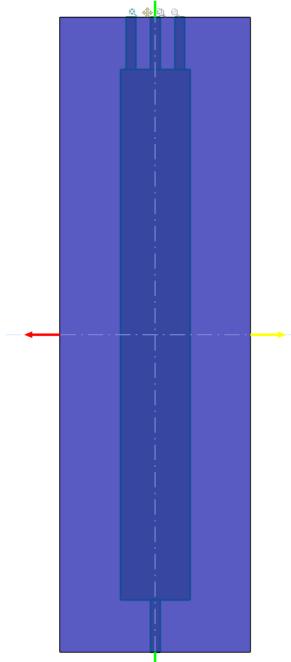
- нажать кнопку **Расчетная область** на ленте инструментов

либо

- в дереве проектов нажать правой кнопкой мыши в поле **Расчетная область** и из контекстного меню выбрать **Изменить...**:

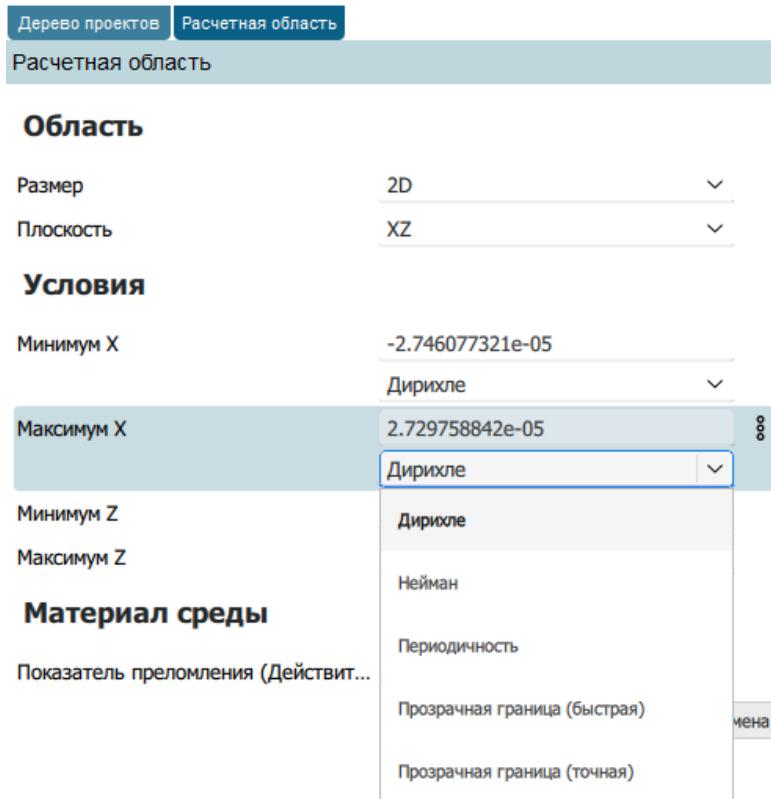


Слева откроется вкладка **Расчетная область**, в которой необходимо задать настройки расчетной области. Также в графической области появятся стрелки-манипуляторы, с помощью которых можно динамически менять размеры расчетной области прямо на



модели:

Чтобы осуществить это необходимо зажать клавишу Shift и потянуть за соответствующий манипулятор. Помимо этого вы также можете менять размеры области непосредственно в окне настройки узла **Расчетная область**.



Окно настроек узла **Расчетная область** содержит разделы **Область**, **Условия**, **Материал среды**.

- **Область** содержит следующие параметры:
  - **Размер** можно выбрать **2D** или **3D**. Пользователь выбирает размерность в соответствии с решаемой задачей.
  - **Плоскость** активна при выборе **2D** в опции **Размер**. Необходимо выбрать рассматриваемую плоскость. Доступны варианты **XY**, **XZ** и **YZ**
- **Условия** для задания типа граничных условий и координат расчетной области. Активные параметры зависят от настройки в разделе **Область**.
  - **Минимум X** задаем минимальную координату расчетной области по X. Во втором раскрывающемся окошке можно выбрать граничное условие, которое будет приложено на соответствующей границе. Доступно несколько видов граничных условий : **Дирихле**, **Нейман**, **Периодичность**, **Прозрачная граница (быстрая)**, **Прозрачная граница (точная)**.

- **Максимум X** задаем максимальную координату расчетной области по X. Во втором раскрывающемся окошке можно выбрать граничное условие, которое будет приложено на соответствующей границе. Доступно несколько видов граничных условий : **Дирихле, Нейман, Периодичность, Прозрачная граница (быстрая), Прозрачная граница (точная)**.
- **Минимум Y** задаем минимальную координату расчетной области по Y. Во втором раскрывающемся окошке можно выбрать граничное условие, которое будет приложено на соответствующей границе. Доступно несколько видов граничных условий : **Дирихле, Нейман, Периодичность, Прозрачная граница (быстрая), Прозрачная граница (точная)**.
- **Максимум Y** задаем максимальную координату расчетной области по Y. Во втором раскрывающемся окошке можно выбрать граничное условие, которое будет приложено на соответствующей границе. Доступно несколько видов граничных условий : **Дирихле, Нейман, Периодичность, Прозрачная граница (быстрая), Прозрачная граница (точная)**.
- **Минимум Z** задаем минимальную координату расчетной области по Z. Во втором раскрывающемся окошке можно выбрать граничное условие, которое будет приложено на соответствующей границе. Доступно несколько видов граничных условий : **Дирихле, Нейман, Периодичность, Прозрачная граница (быстрая), Прозрачная граница (точная)**.
- **Максимум Z** задаем максимальную координату расчетной области по Z. Во втором раскрывающемся окошке можно выбрать граничное условие, которое будет приложено на соответствующей границе. Доступно несколько видов граничных условий : **Дирихле, Нейман, Периодичность, Прозрачная граница (быстрая), Прозрачная граница (точная)**.

-  **Прим.:**  
 Доступность того или иного граничного условия зависит от выбранного метода. Подробнее об этом можно прочитать в разделе "Теоретическое руководство" данной документации.
  
-  **Прим.:**  
 Граничные условия задаются на границы, перпендикулярные направлению распространения. В направлении распространения граничные условия не ставят.

- **Материал среды** требует введения значения для параметра **Показатель преломления (Действительная**

**Материал среды**



часть).

## Задание материалов

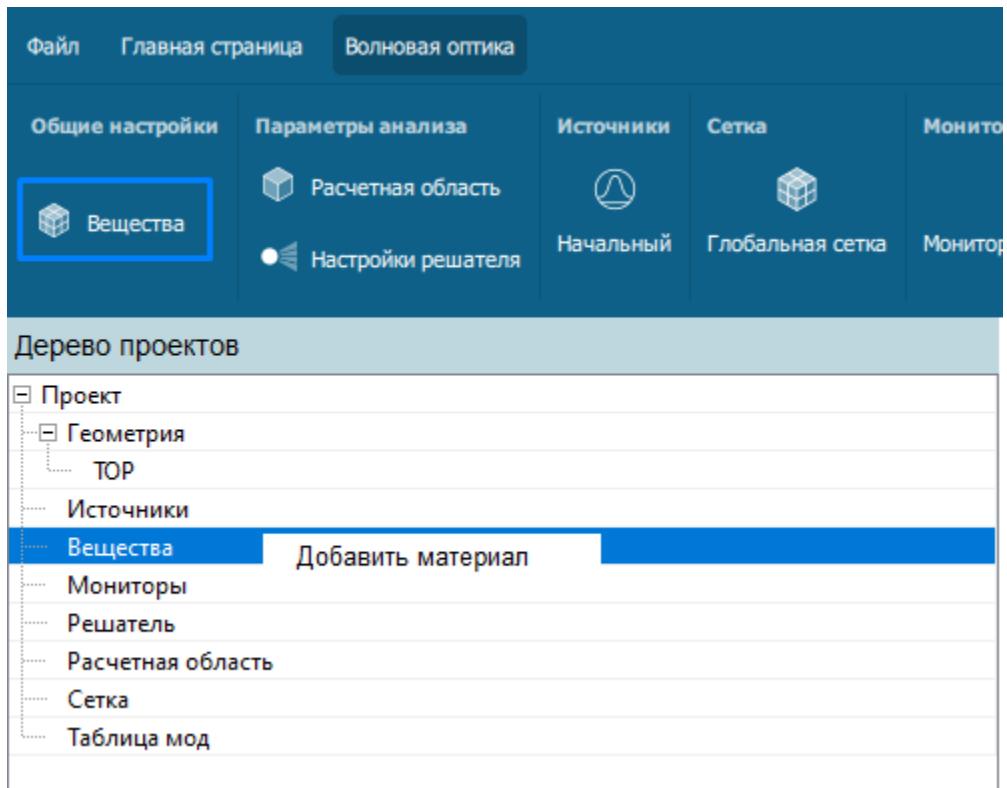
*В оптических системах основным свойством материала, которое необходимо для определения задачи является показатель преломления.*

Для задания материала:

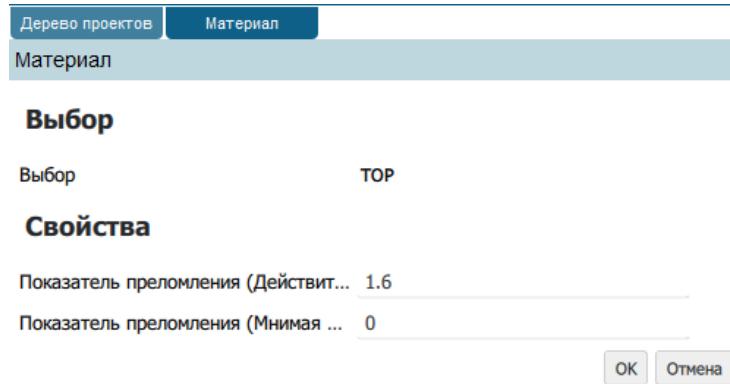
- нажать кнопку **Вещества** на ленте инструментов

либо

- в дереве проектов нажать правой кнопкой мыши в поле **Вещества** и из контекстного меню выбрать **Добавить материал**:



Слева откроется вкладка **Материал**, в которой необходимо задать настройки материала. Окно настроек узла **Материал** содержит разделы **Выбор**, **Свойства**



- **Выбор** позволяет выбрать геометрический объект (в данном случае контур из GDS файла), для которого задаются свойства. Контур можно выбрать прямо из дерева проектов **Дерево проектов>Геометрия** и выбрать объект, который находится в этом разделе.

- **Свойства** позволяет задавать значения параметров **Показатель преломления (Действительная часть)** и **Показатель преломления (Мнимая часть)**.

## Задание гауссовского источника

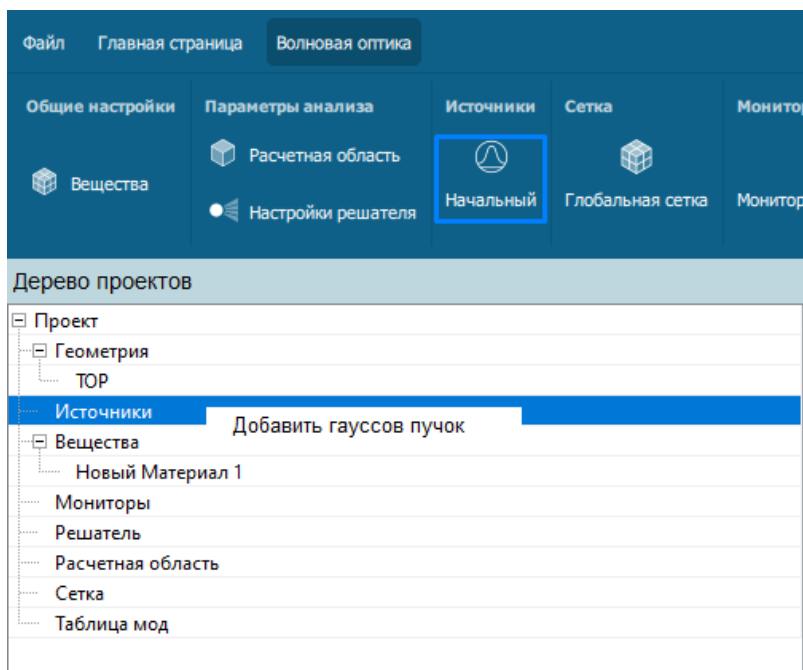
*Гауссов пучок — пучок электромагнитного излучения, в котором распределение электрического поля в поперечном сечении хорошо аппроксимируется функцией Гаусса (нормальное распределение).*

Для добавления источника излучения:

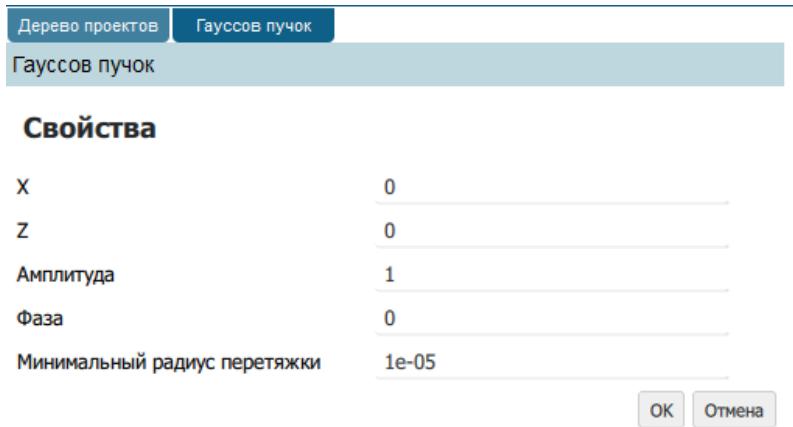
- нажать кнопку **Начальный** на ленте инструментов

либо

- в дереве проектов нажать правой кнопкой мыши в поле **Источники** и из контекстного меню выбрать **Добавить гауссов пучок**:



Слева откроется вкладка **Гауссов пучок**, в которой необходимо задать свойства гауссова пучка:



- **X** позволяет задавать положение источника по оси X.
- **Z** позволяет задавать положение источника по оси Z.
- **Амплитуда** позволяет задавать амплитуду гауссового источника.
- **Фаза** — фазовый сдвиг гауссового источника.
- **Минимальный радиус перетяжки** — это место вдоль оси распространения, где площадь поперечного сечения луча минимальна и, следовательно, интенсивность самая высокая. Перетяжка пучка коррелирует с среднеквадратичным распределением.

## Способ построения сетки

В программе OPTICS SIM задается регулярная структурированная сетка. Пользователь может задавать размер ячейки явно, для этого есть настройка **Определено через размер ячейки** или при задании ориентироваться на длину волны, чтобы не упустить никаких эффектов при задании сетки, для этого случая есть настройка **Определено через длину волны**.

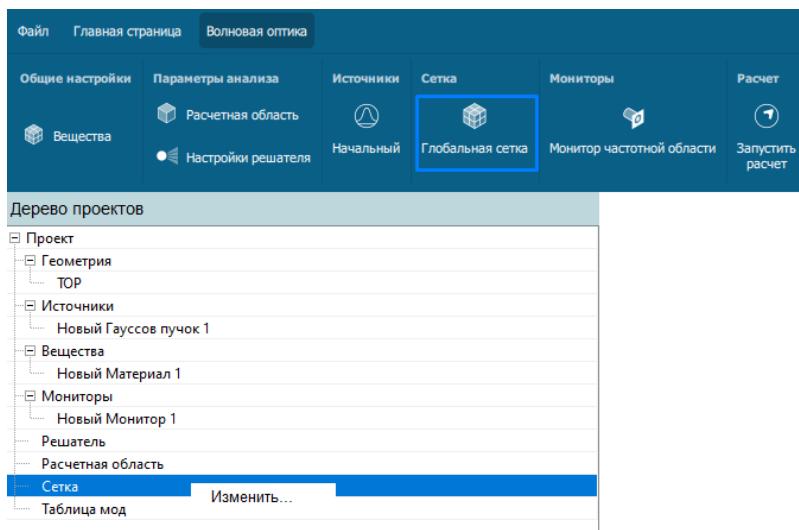
## Задание настроек сетки

Для доступа к настройкам расчетной сетки:

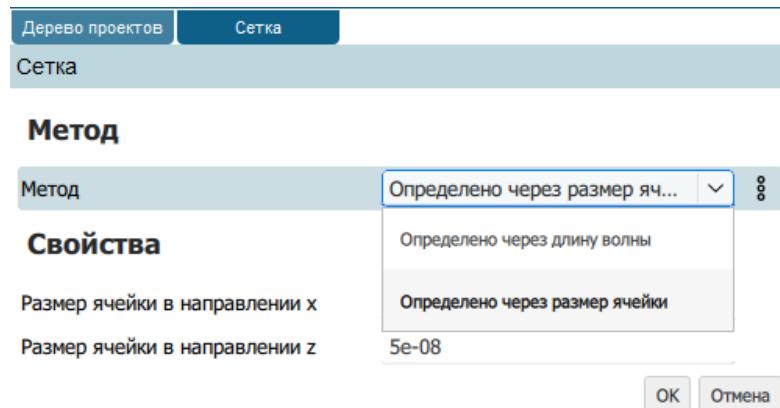
- нажать кнопку **Глобальная сетка** на ленте инструментов

либо

- В дереве проектов нажать правой кнопкой мыши в поле **Сетка** и из контекстного меню выбрать **Изменить...**:



Слева откроется вкладка **Сетка**, в которой необходимо выбрать метод задания сетки в разделе **Метод** и заполнить раздел

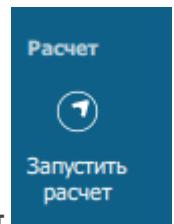


#### Свойства:

- Если выбран метод **Определено через размер ячейки**, то необходимо задать следующие свойства:
  - **Размер ячейки в направлении x** позволяет задать численное значение размера ячейки.
  - **Размер ячейки в направлении y** позволяет задать численное значение размера ячейки.
  - **Размер ячейки в направлении z** позволяет задать численное значение размера ячейки.

- Если выбран метод **Определено через длину волны**, то необходимо задать следующие свойства:
  - Размер ячейки в направлении x** позволяет задать численное значение размера ячейки.
  - Размер ячейки в направлении y** позволяет задать численное значение размера ячейки.
  - Размер ячейки в направлении z** позволяет задать численное значение размера ячейки.

## Запуск расчета



Для запуска расчета на ленте инструментов нажать кнопку **Запустить расчет**.

Далее начинается процесс расчета и появляется окно решателя.

```
C:\Program Files\OPTICS SIM\OPTICS SIM\bin\PhotonicsSolver.exe
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Solution: 99.75% Time left: 0.00342659s
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [debug] Processing monitor 1b1984cf-63d7-434d-bc5d-e31e08a5510c: 99.81%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Solution: 99.78%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Time left: 0.00340531s
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [debug] Processing monitor 1b1984cf-63d7-434d-bc5d-e31e08a5510c: 99.84%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Solution: 99.81%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Time left: 0.003366414s
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [debug] Processing monitor 1b1984cf-63d7-434d-bc5d-e31e08a5510c: 99.86%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Solution: 99.84%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Time left: 0.00328307s
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [debug] Processing monitor 1b1984cf-63d7-434d-bc5d-e31e08a5510c: 99.89%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Solution: 99.85%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Time left: 0.003190227s
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [debug] Processing monitor 1b1984cf-63d7-434d-bc5d-e31e08a5510c: 99.92%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Solution: 99.89%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Time left: 0.003152145s
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [debug] Processing monitor 1b1984cf-63d7-434d-bc5d-e31e08a5510c: 99.95%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Solution: 99.92%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Time left: 0.003144882s
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [debug] Processing monitor 1b1984cf-63d7-434d-bc5d-e31e08a5510c: 99.97%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Solution: 99.95%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Time left: 0.00313760493s
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [debug] Processing monitor 1b1984cf-63d7-434d-bc5d-e31e08a5510c: 100%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Solution: 99.97%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Time left: 0.0030380111s
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [debug] Processing monitor 1b1984cf-63d7-434d-bc5d-e31e08a5510c: 100%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Solution: 100%
[2024-08-28 16:44:28.830268] [0x00002ab8] [info] Time left: 0s
```

Для того, чтобы открыть результаты, не закрывайте окно решателя после завершения расчета.

## Частотные мониторы

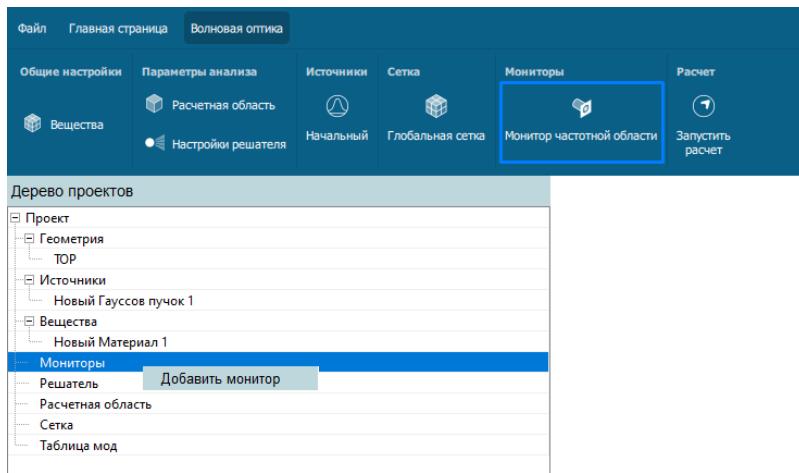
Для того, чтобы получить результаты необходимо настроить монитор частотной области. То есть обозначить срез (плоскость), на которой пользователь выводит результаты.

Мониторы необходимо настроить до запуска расчета. Для добавления монитора частотной области:

- нажать кнопку **Монитор частотной области** на ленте инструментов

либо

- в дереве проектов нажать правой кнопкой мыши в поле **Мониторы** и из контекстного меню выбрать **Добавить монитор**:

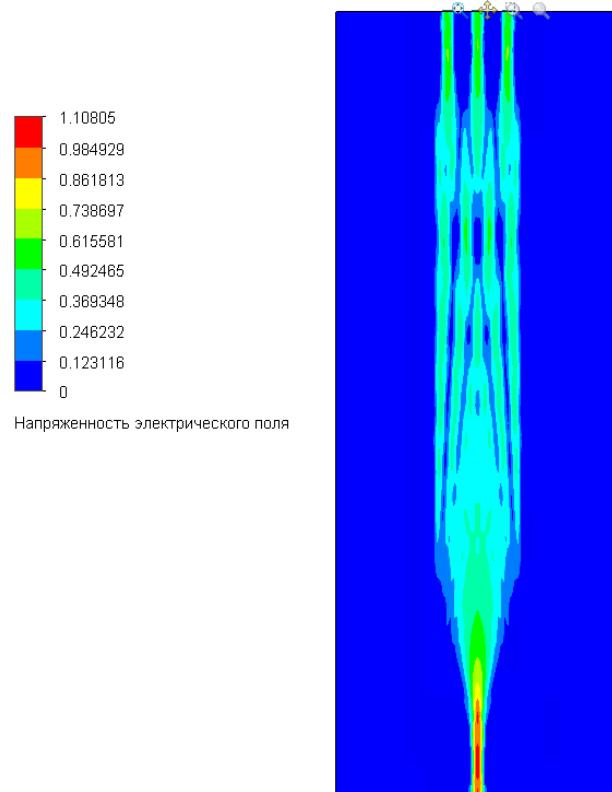


Дальнейшая инструкция выполняется после завершения расчета:

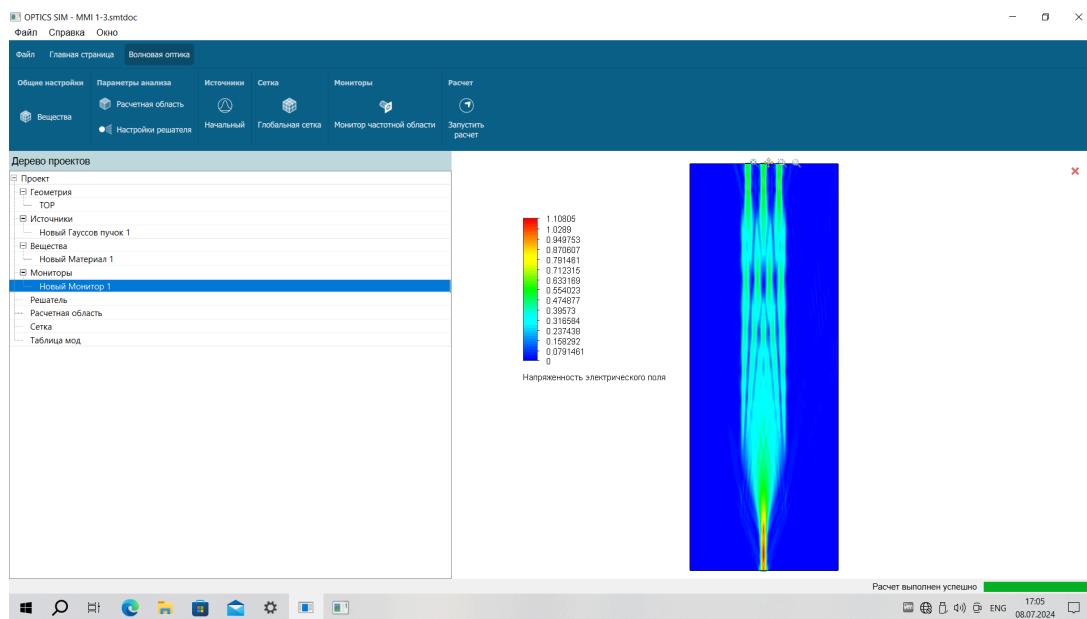
Слева откроется вкладка **Монитор**, в которой необходимо выбрать плоскость в разделе **Область** и задать размеры в разделе **Размер**

Дальнейшая инструкция выполняется после завершения расчета:

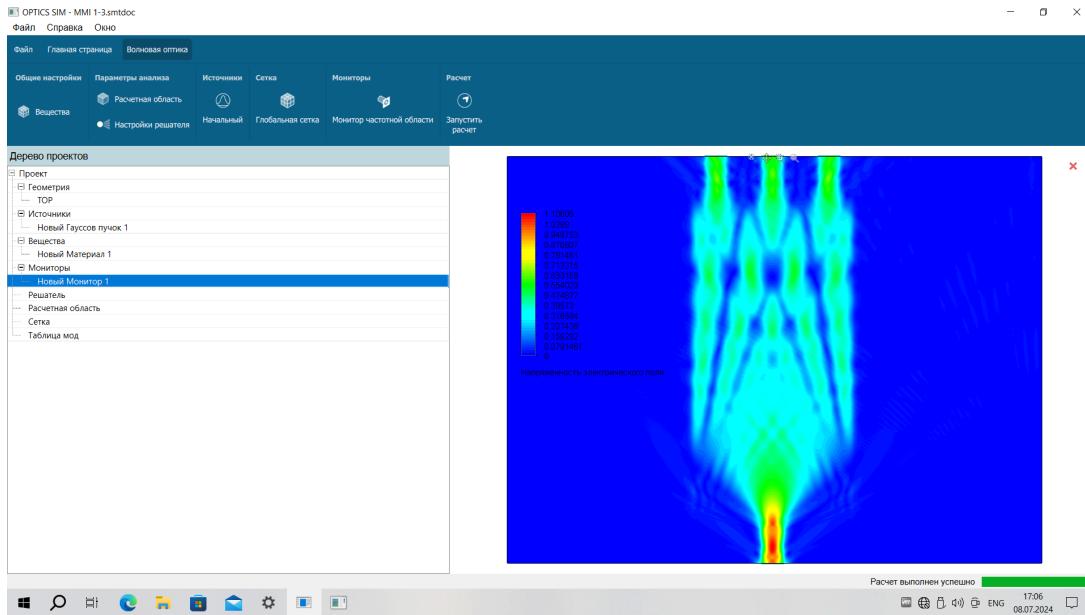
- Для этого нажать **Мониторы > Новый монитор1 > Показать**. В графической области после этого визуализируется распределение электрического поля.



При желании можно сделать график более гладким, изменив настройки цветовой шкалы слева. Нажать на палитру и передвинуть ползунок.



Для более детального анализа получившихся результатов можно изменить соотношение сторон расчетной области в графической области – например, сделать ее шире (фактические размеры расчетной области при этом не изменяются, это влияет только на визуализацию). Подвести курсор к нижней левой части графической области – подсветится рычажок. Передвинуть рычажок в подходящее положение либо нажать на стрелку справа.



# Приложение - Теоретическое руководство

*Настоящее руководство содержит информацию о физических моделях, реализованных в программном продукте OPTICS SIM.*

## Основные уравнения

*В этом разделе представлены уравнения, лежащие в основе численной модели фотоники.*

### Уравнения Максвелла

*Уравнения Максвелла представляют собой систему уравнений, записанных в дифференциальной или интегральной форме и обозначающих связь между фундаментальными электромагнитными величинами. Устройства, используемые в электростатике, такие как конденсатор, могут иметь очень мало общего с устройствами из оптики, такими как оптоволокно. Несмотря на совершенно разные характеристики, все эти области применения, в основном, описываются уравнениями Максвелла.*

$$(1.1) \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} + \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \end{cases}$$

где  $\mathbf{E}$  — напряженность электрического поля,  $\mathbf{D}$  — поле электрического смещения,  $\mathbf{H}$  — напряженность магнитного поля,  $\mathbf{B}$  — плотность магнитного потока,  $\mathbf{j}$  — плотность тока,  $\rho$  — плотность электрического заряда.

### Уравнения Максвелла во временной области

Макроскопические уравнения Максвелла в отсутствие внешней плотности заряда  $\rho(\mathbf{r}, t)$  и плотности тока  $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$  имеют вид

$$(1.2) \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) \end{cases}$$

Принимаем, что среда локальная, линейная и изотропная. Таким образом, векторы поляризации  $\mathbf{P}$  и намагниченности  $\mathbf{M}$  определяются как

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) &= \epsilon_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_E(\mathbf{r}, t-t_1) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t_1) dt_1 \\ \mathbf{M}(\mathbf{r}, t) &= \mu_0 \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_H(\mathbf{r}, t-t_1) \mathbf{H}(\mathbf{r}, t_1) dt_1 \end{aligned}$$

где  $\chi_E(t)$  и  $\chi_H(t)$  линейная электрическая и магнитная восприимчивость. Однако нелокальные модели применимы только для проводников длиной в несколько нанометров, а на практике локальные модели почти всегда достаточно точны, чтобы игнорировать нелокальные эффекты. То есть поляризация пропорциональна средневзвешенному значению полей в разное время. С точки зрения физики необходимо, чтобы материал имел причинно-следственную связь: поляризация и намагниченность должны возникать после создающих их полей, а не раньше, из чего получаем условие  $\chi_E(t) = 0$  и  $\chi_H(t) = 0$  для  $t < 0$ . В линейной среде также потребуется пассивность — материал может рассеивать энергию, но не отдавать ее — оказывается, что одного предположения о пассивности достаточно, чтобы гарантировать причинно-следственную природу.

## Уравнения Максвелла в частотной области

В данном случае мы представляем векторы напряженности электрического и магнитного полей, а также векторы электрического смещения и магнитной индукции как интегралы Фурье (гармонические моды)

$$(1.4) \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F}(\mathbf{r}, \omega) e^{i\omega t} d\omega, \quad \mathbf{F} = \{\mathbf{E}, \mathbf{H}, \mathbf{D}, \mathbf{B}\}$$

Подставляя [уравнение \(1.4\) \(на странице 30\)](#) в [уравнения \(1.2\) \(на странице 30\)](#), [\(1.3\) \(на странице 30\)](#) после применения теоремы о свертке и приравнивания подынтегральных выражений при фиксированной угловой частоте  $\omega$ , получаем

$$(1.5) \quad \begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) = -i\omega \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) \\ \nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = 0 \\ \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = i\omega \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) \\ \mathbf{D}(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_0 \epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) \\ \mathbf{B}(\mathbf{r}, \omega) = \mu_0 \mu_r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) \end{cases}$$

где  $\epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \chi_E(\mathbf{r}, \omega)$  — относительная диэлектрическая проницаемость, а  $\mu_r(\mathbf{r}, \omega) = 1 + \chi_H(\mathbf{r}, \omega)$  — относительная магнитная проницаемость.

## Уравнение Гельмгольца

Из [уравнения \(1.5\) \(на странице 31\)](#) получим следующее уравнение для компоненты вектора напряженности электрического поля Фурье, выполнив следующие шаги:

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) &= i\omega \mu_0 [(\nabla \mu_r(\mathbf{r}, \omega)) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + \mu_r(\mathbf{r}, \omega) \nabla \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega)], \\ \nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) &= i\omega \mu_0 (\nabla \mu_r(\mathbf{r}, \omega)) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 \epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) \mu_r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega), \\ \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2 n^2(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) &= -i\omega \mu_0 (\nabla \mu_r(\mathbf{r}, \omega)) \times \mathbf{H}(\mathbf{r}, \omega) + \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)), \end{aligned}$$

где  $c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$  скорость света в вакууме,  $k_0 = \omega/c$  волновое число в свободном пространстве и  $n^2 = \epsilon_r \mu_r$  показатель преломления. Полагая, что относительная магнитная проницаемость  $\mu_r$  не зависит от пространства  $\mu_r(\mathbf{r}, \omega) = \mu_r(\omega)$ , как обычно полагают, получаем

$$(1.6) \quad \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2 n^2(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)),$$

Если пренебречь членом в правой части, приедем к уравнению Гельмгольца. Для уравнения Гельмгольца в декартовых координатах компоненты вектора напряженности электрического поля Фурье не смешиваются. Следовательно, каждый компонент должен удовлетворять скалярному уравнению Гельмгольца

$$(1.7) \quad \nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, \omega) + k_0^2 n^2(\mathbf{r}, \omega) \Psi(\mathbf{r}, \omega) = 0.$$

Нам нужно указать условия, при которых условия уравнения  $\nabla (\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) = 0$  удовлетворяются. Первое уравнение в [\(1.5\) \(на странице 31\)](#) можно переписать в виде

$$(1.8) \quad 0 = \nabla \cdot (\epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) = \epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) \nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega) + (\nabla \epsilon_r(\mathbf{r}, \omega)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega).$$

Полагая, что  $\varepsilon_r(\mathbf{r}, \omega) \neq 0$  для любых  $\mathbf{r}$  и  $\omega$  уравнение (1.8) (на странице 31) дает следующий результат

$$(1.9) \quad \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) = -\nabla[\nabla \ln(\varepsilon_r(\mathbf{r}, \omega)) \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)]$$

Из уравнения (1.9) (на странице 32) следует, что условия уравнения удовлетворяются, если  $\nabla \ln(\varepsilon_r(\mathbf{r}, \omega)) = 0$  и  $\nabla \ln(\varepsilon_r(\mathbf{r}, \omega)) \perp \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)$ . Первое условие — отсутствие какого-либо рассеивателя в системе. Второе условие выполняется, например, для двумерного рассеяния, когда электрическое поле перпендикулярно плоскости рассеяния.

Более того, уравнение Гельмгольца можно использовать в качестве приближения для некоторых других систем, где этот член уравнения  $\nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, \omega)) = 0$  мал по сравнению с двумя другими в уравнении (1.6) (на странице 31). Это тот случай, когда  $\varepsilon_r$  медленно меняется в масштабе длины волны.

Из уравнения (1.5) (на странице 31) мы получаем следующее уравнение для компонентов вектора напряженности магнитного поля Фурье, выполнив следующие шаги : ( $\mu_r = 1$ )

$$\begin{aligned} -\nabla \times \left( \frac{1}{n^2} \nabla \times \mathbf{H} \right) + k_0^2 \mathbf{H} &= 0 \\ -\nabla \frac{1}{n^2} \times (\nabla \times \mathbf{H}) - \frac{1}{n^2} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{H}) + k_0^2 \mathbf{H} &= 0 \\ -\nabla \frac{1}{n^2} \times \left( \nabla \times \mathbf{H} \right) - \frac{1}{n^2} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{H}) + \frac{1}{n^2} \nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla^2 \mathbf{H} + k_0^2 n^2 \mathbf{H} &= n^2 \nabla \frac{1}{n^2} \times (\nabla \times \mathbf{H}) \end{aligned}$$

Пренебрегая правым членом уравнения, получаем уравнение Гельмгольца для компонент напряженности магнитного поля.

## Методы расчета

В этом разделе представлены численные методы, реализованные в программе OPTICS SIM для решения задач фотоники.

Метод конечных разностей в частотной области (FDFD) позволяет найти нормальные моды волновода. Метод распространения луча (BPM) и метод конечной разности во временной области (FDTD) предоставляют функциональные возможности для анализа распространения в различных средах.

## Метод распространения пучка (BPM)

Учитывая, что в типичных задачах с направленными волнами наиболее быстрое изменение поля  $\Psi$  происходит из-за изменения фазы при распространении вдоль направляющей оси, и полагая, что ось преимущественно движется в направлении  $z$ , полезно исключить это быстрое изменение из задачи, введя так называемое медленно меняющееся поле  $\Phi$  через Анзац

$$\psi(\mathbf{r}, \omega) = \Phi(\mathbf{r}, \omega)e^{ikz}$$

где  $k$  постоянное число, которое следует выбрать для представления среднего изменения фазы поля  $\Psi$  и называется характерным волновым числом. При введении приведенного выше выражения в уравнение Гельмгольца получаем следующее уравнение для медленно меняющегося поля:

$$\frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, \omega)}{\partial z^2} + i2k \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \omega)}{\partial z} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, \omega)}{\partial y^2} + (k_0^2 n^2(\mathbf{r}, \omega) - k^2) \Phi(\mathbf{r}, \omega) = 0.$$

На этом этапе приведенное выше уравнение полностью эквивалентно точному уравнению Гельмгольца, за исключением того, что оно выражается в терминах  $\Phi$ . Предположим, что вариация  $\Phi$  с  $z$  выполняется достаточно медленно, так что первым членом в Уравнении (4.2) можно пренебречь по отношению ко второму; это знакомое приближение медленно меняющейся огибающей, и в этом контексте его также называют параксиальным или параболическим приближением. При таком предположении и после небольшой перестановки приведенное выше уравнение сводится к

$$\frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, \omega)}{\partial z} = \frac{i}{2k} \left( \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, \omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi(\mathbf{r}, \omega)}{\partial y^2} + (k_0^2 n^2(\mathbf{r}, \omega) - k^2) \Phi(\mathbf{r}, \omega) \right)$$

Это основное уравнение BPM в 3D; упрощение до 2D достигается за счет исключения какой-либо зависимости от  $y$ . Учитывая входное поле,  $\Phi(x, y, z=0, \omega)$ , вышеуказанное уравнение определяет эволюцию поля в пространстве  $z > 0$ .

Важно понять недостатки и преимущества вышеуказанного подхода. Во-первых, учет быстрого изменения фазы позволяет численно представить медленно меняющееся поле на продольной сетке (т.е. вдоль нее  $z$ ), которая для многих задач может быть намного грубее длины волны, что отчасти способствует эффективности метода. Во-вторых, исключение второй производной в  $z$  сводит задачу от краевой задачи второго порядка, требующей итерации или анализа собственных значений, к задаче с начальными значениями первого порядка, которую можно решить простым «интегрированием» приведенного выше уравнения вдоль направление распространения  $z$ . Этот последний момент также является

основным фактором, определяющим эффективность BPM, подразумевая сокращение времени, по меньшей мере, порядка  $N_z$  (число продольных точек сетки) по сравнению с полным численным решением уравнения Гельмгольца.

Вышеупомянутые преимущества достигнуты сложным путем. Приближение медленно меняющейся огибающей ограничивает рассмотрение полями, которые распространяются преимущественно вдоль  $z$  оси (т.е. параксиальность), а также накладывает ограничения на индекс контраста (точнее, скорость изменения индекса с  $z$ , которая представляет собой комбинацию индекса контраста и угла распространения). Вторая ключевая задача, выходящая за рамки вышеуказанных ограничений на вариации,  $\Phi$  заключается в том, что исключение второй производной также исключает возможность решения с помощью обратной бегущей волны; таким образом, устройства, для которых отражение является существенным, не будут смоделированы с учетом необходимой точности. К счастью, вышеупомянутые проблемы, которые следует считать присущими методу BPM, могут быть устранены или значительно смягчены во многих задачах за счет использования так называемых широкоугольных и двунаправленных расширений BPM. Другие ограничения в приведенной выше формуле, такие как пренебрежение поляризацией и упрощение свойств материалов, например, изотропных, линейных, не являются характерными для метода BPM.

## Методы конечных разностей для BPM в 2D

Уравнение (4.3) (базовое уравнение BPM в 3D) представляет собой параболическое уравнение в частных производных, которое можно «интегрировать» далее по  $z$  с помощью ряда стандартных численных методов. В большинстве ранних BPM использовался метод, известный как метод Фурье. Более поздние работы показали, что для большинства задач, представляющих интерес в интегральной оптике, лучше подходит неявный метод конечных разностей, основанный на известной схеме Крэнка-Николсона. Этот метод и его производные теперь являются стандартом и по этой причине мы его рассматриваем в данной статье. В литературе его часто называют FD-BPM, но в дальнейшем он будет называться просто BPM.

В методе конечных разностей поле в поперечной ( $xy$ ) плоскости представлено только в дискретных точках сетки и в дискретных плоскостях в продольном направлении или в направлении распространения ( $z$ ). Учитывая дискретизированное поле в одной  $z$  плоскости, цель состоит в том, чтобы вывести численные уравнения, которые определяют поле в следующей плоскости  $z$ . Затем этот элементарный этап распространения повторяется для определения поля во всей структуре. Первоначально метод проиллюстрирован для скалярного поля в 2D ( $xz$ ).

Чтобы разработать метод FD для решения Уравнения (4.3), обобщаем это уравнение на

$$\frac{\partial \Phi(x, z, \omega)}{\partial z} = A \frac{\partial^2 \Phi(x, z, \omega)}{\partial x^2} + B \Phi(x, z, \omega)$$

где

$$A(x, z) = \frac{i}{2k} = \text{Const}, \quad B(x, z) = \frac{i}{2k} (k_0^2 n^2(x, z, \omega) - k^2).$$

При дискретизации  $\Phi(x, z, \omega)$  будет использоваться обозначение  $\Phi_m^n = \Phi(x_m, z_n, \omega)$ , где поперечная сетка  $[x_m = a + m \Delta_x; \quad m = 0, N_x; \quad \Delta_x = (b - a) / N_x]$ , а продольная сетка  $[z_n = n \Delta_z; \quad n = 0, 1, 2, \dots]$

### Схема Крэнка-Николсона (CN)

Для дискретизации уравнения (5.1) будем следовать подходу Крэнка-Николсона и оценивать конечную разность на фиктивном полушаге  $(m, n + 1/2)$  (Ref. 1 (на странице 61)):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^{n+1/2} &\equiv \frac{\Phi_{m+1}^{n+1} - \Phi_m^n}{\Delta z} \\ \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} \right)^{n+1/2} &\equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\Phi_{m-1}^n + 2\Phi_m^n + \Phi_{m+1}^n}{\Delta_x^2} + \frac{\Phi_{m-1}^{n+1} + 2\Phi_m^{n+1} + \Phi_{m+1}^{n+1}}{\Delta_x^2} \right) \\ (B\Phi)_m^{n+1} &\equiv \frac{1}{2} (B_m^n \Phi_m^n + B_m^{n+1} \Phi_m^{n+1}). \end{aligned}$$

Если мы подставим эти выражения в уравнение (5.1) и предположим, что  $\rho = \Delta_z / \Delta_x^2$ , мы получим следующую систему уравнений:

$$a_m \Phi_{m-1}^{n+1} + b_m \Phi_m^{n+1} + c_m \Phi_{m+1}^{n+1} = d_m, \quad m = 1, N_x - 1,$$

где

$$\begin{aligned} a_m &= c_m = 1, \\ b_m &= -2 + i \frac{4k}{\rho} + \Delta_x^2 (k_0^2 (n_m^{n+1})^2 - k^2), \\ d_m &= \left( 2 + i \frac{4k}{\rho} - \Delta_x^2 (k_0^2 (n_m^{n+1})^2 - k^2) \right) \Phi_m^n - (\Phi_{m+1}^n + \Phi_{m-1}^n). \end{aligned}$$

При условии, что поле  $z$  при шаге  $n$  (т.е.  $\Phi_m^n$  для  $m = 0, N_x$ ), уравнения (5.4) вместе с граничными условиями дают систему уравнений для поля при шаге  $z$  при шаге  $n + 1$ , что позволяет распространить поле в  $z$ . Точность метода зависит от размера шага  $\Delta_z$  и сетки,  $\Delta_x$  а также от размера расчетной области. Заметим, что система уравнений (5.4) трехдиагональна и может решаться  $O(N_x)$  операций.

## Обобщенная схема Дугласа (GD)

Кратко суммируем, как можно включить схему GD в FDBPM ([Ref. 2 \(на странице 61\)](#)).

В двумерной задаче уравнение Френеля имеет вид Eq.(5.1). Используя разложение в ряд Тейлора,

$$\Phi(x_0 \pm \Delta_x, z_0) = \Phi(x_0, z_0) \pm \frac{\partial \Phi}{\partial x}_{(x_0, z_0)} \Delta_x + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}_{(x_0, z_0)} \Delta_x^2 \pm \frac{\partial^3 \Phi}{\partial x^3}_{(x_0, z_0)} \Delta_x^3 + \frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}_{(x_0, z_0)} \Delta_x^4 \pm \frac{\partial^5 \Phi}{\partial x^5}_{(x_0, z_0)} \Delta_x^5 + O(\Delta_x)^6$$

вторая производная представлена в виде

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}_{(x_0, z_0)} = \frac{\Phi(x_0 - \Delta_x, z_0) - 2\Phi(x_0, z_0) + \Phi(x_0 + \Delta_x, z_0)}{\Delta_x^2} - \frac{\partial^4 \Phi}{12 \partial x^4}_{(x_0, z_0)} + O(\Delta_x)^2.$$

В традиционном FD-BPM оценивается только первый член в правой части уравнения (5.7), что приводит к ошибке усечения:  $O(\Delta_x)^2$ . В обобщенной схеме Дугласа второй член уравнения оценивается следующим образом, предполагая  $\partial^2 \Phi / \partial x^2$  вместо  $\Phi$  в Eq.(5.6)):

$$\frac{\partial^4 \Phi}{\partial x^4}_{(x_0, z_0)} = \frac{2}{\Delta_x^2} \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}_{(x_0 - \Delta_x, z_0)} - 2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}_{(x_0, z_0)} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}_{(x_0 + \Delta_x, z_0)} \right) + O(\Delta_x)^2.$$

Вторые производные в уравнении (5.8) заменяются уравнением Френеля (5.1). Тогда можно вывести следующее дифференциальное уравнение:

$$A \frac{\Phi(x_0 - \Delta_x, z_0) - 2\Phi(x_0, z_0) + \Phi(x_0 + \Delta_x, z_0)}{\Delta_x^2} = \frac{1}{12} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{(x_0 - \Delta_x, z_0)} + \frac{5}{6} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{(x_0, z_0)} + \frac{1}{12} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)_{(x_0 + \Delta_x, z_0)} - \frac{1}{12} (B\Phi)_{(x_0 - \Delta_x, z_0)} - \frac{5}{6} (B\Phi)_{(x_0, z_0)} - \frac{1}{12} (B\Phi)_{(x_0 + \Delta_x, z_0)}$$

Теперь введем  $z$  дифференцирование по и получим

$$\frac{1}{12} \frac{\Phi_{m-1}^{n+1} - \Phi_m^n}{\Delta_z} + \frac{5}{6} \frac{\Phi_{m-1}^{n+1} - \Phi_m^n}{\Delta_z} + \frac{1}{12} \frac{\Phi_{m+1}^{n+1} - \Phi_{m+1}^n}{\Delta_z} = A \frac{1}{2 \Delta_x^2} (\Phi_{m-1}^n - 2\Phi_m^n + \Phi_{m+1}^n + \Phi_{m-1}^{n+1} - 2\Phi_m^{n+1} + \Phi_{m+1}^{n+1}) + \frac{1}{24} (B_{m-1}^n \Phi_{m-1}^n + B_{m-1}^{n+1} \Phi_{m-1}^{n+1}) + \frac{5}{12} (B_m^n \Phi_m^n + B_m^{n+1} \Phi_m^{n+1})$$

В результате получаем следующую систему уравнений:

$$a_m^{n+1} \Phi_{m-1}^{n+1} + b_m^{n+1} \Phi_m^{n+1} + c_m^{n+1} \Phi_{m+1}^{n+1} = d_m^n$$

где

$$a_m^{n(\pm)} = -\frac{ik}{6} \pm \frac{\Delta z}{2\Delta_x^2} \pm \frac{\Delta z}{24} \left( k_0^2 (n_{m-1}^n)^2 - k^2 \right),$$

$$b_m^{n(\pm)} = -\frac{i5k}{3} \mp \frac{\Delta z}{\Delta_x^2} \pm \frac{5\Delta z}{24} \left( k_0^2 (n_{m-1}^n)^2 - k^2 \right),$$

$$b_m^n = -\frac{ik}{6} \mp \frac{\Delta z}{2\Delta_x^2} \pm \frac{\Delta z}{24} \left( k_0^2 (n_{m-1}^n)^2 - k^2 \right),$$

$$d_m^n = a_m^{n(+)} \Phi_{m-1}^n + b_m^{n(+)} \Phi_m^n + c_m^{n(+)} \Phi_{m+1}^n$$

## Границные условия для ВРМ

Теперь рассмотрим возможные граничные условия для метода распространения пучка ([Ref. 1 \(на странице 61\)](#)).

Поскольку уравнения (5.4) корректно описаны только для внутренних точек ( $m = \overline{1, N_x - 1}$ ), требуется два уравнения, чтобы определить  $\Phi_0^{n+1}$  и  $\Phi_{N_x}^{n+1}$ . Граничные условия Дирихле обеспечивают простейшую возможность путем задания граничных значений  $\Phi_0^{n+1}$  и  $\Phi_{N_x}^{n+1}$  напрямую. Граничные условия Неймана почти так же просты.

## Периодическое граничное условие

Рассматривается реализация периодического граничного условия. Получаем следующие два отношения между  $\Phi_0^{n+1}$  и  $\Phi_{N_x}^{n+1}$  и внутренними точками:

$$\Phi_0^{n+1} = \Phi_{N_x}^{n+1}, \quad a_0 \Phi_{N_x-1}^{n+1} + b_0 \Phi_0^{n+1} + c_0 \Phi_1^{n+1} = d_0$$

Самый простой способ включить указанные отношения в уравнения (5.4) — решить их для  $\Phi_0^{n+1}$  и  $\Phi_{N_x}^{n+1}$  с учетом внутренних точек и подставить полученные выражения в уравнения (5.4) с  $m=1$  и  $m=N_x-1$  соответственно. Получим следующую модификацию уравнений для первой и последней внутренних точек:

$$-\frac{a_0}{b_0} \Phi_{N_x-1}^{n+1} + \left( b_1 - \frac{c_0}{b_0} \right) \Phi_1^{n+1} + c_1 \Phi_2^{n+1} = d_1 - \frac{a_1 d_0}{b_0},$$

$$a_{N_x-1} \Phi_{N_x-2}^{n+1} + \left( b_{N_x-1} - \frac{a_0}{b_0} \right) \Phi_{N_x-1}^{n+1} + \frac{c_0}{b_0} \Phi_1^{n+1} = d_{N_x-1} - c_{N_x-1} \frac{d_0}{b_0}$$

Таким образом, для периодических граничных условий приведенная система уравнений для внутренних точек включает в себя уравнение (5.4) для  $m = \overline{2, N_x - 2}$  и уравнение (5.14) для  $m=1$  и  $m=N_x-1$ . Граничные значения получены из уравнений (5.13). Обратите

внимание, что эта модифицированная система уравнений больше не является идеально трехдиагональной; однако это все еще можно решить с помощью  $O(N_x)$  операций.

## Границное условие поглощения

В типичной решаемой задаче по физике начальное поле  $\Phi(x, z=0, \omega)$  должно быть задано как функция  $x$ , а уравнение (4.3) описывает эволюцию поля по  $z$ . Также, необходимо задать граничные условия для расчетной области по  $x$ . Разумным граничным условия считается то условие, которое находится на бесконечном расстоянии от интересующей области, то есть области, где  $n(x, z, \omega)$  меняется). Происходит излучение любой части электрического поля, распространяемого в поперечном сечении, и потеря его энергия в системе. Это условие довольно сложно реализовать численным методом по двум причинам. Во-первых, граница расчетной области должна быть конечной. Во-вторых, на конечной границе трудно отличить часть поля, распространяющуюся в поперечном сечении, от части поля, распространяющейся в продольном сечении. Типичный метод, используемый для аппроксимации этого физического граничного условия, состоит в выборе численного граничного условия, которое позволяет полю на границе плавать при некотором конечном, но не указанном значении, (например, периодических граничных условиях), и искусственном размещении области поглощающего материала на границе путем добавления мнимой части к показателю преломления  $n(x, z, \omega)$ . Расчетная область стандартно выбирается как  $x \in [-L_b, L_b]$ , а показатель преломления в оболочке записывается как ([Ref.1 \(на странице 61\)](#))

$$n(x, z) = \begin{cases} n(x, z), & |x| < D(z) + x_\alpha \\ n(x, z)(1+i\alpha), & D(z) + x_\alpha \leq |x| \leq L_b \end{cases}$$

Здесь  $\alpha$  определяет прочность поглощающей области, а  $x$  задает расстояние поглощающего элемента от локального ребра области покрытия.  $D(z)$ .

При использовании вышеописанного метода следует отметить несколько моментов. Рассмотрим, например, распространение одиночной моды в пластинчатом волноводе, которая теоретически должна распространяться без затухания. Размещение искусственного поглощающего элемента на любом конечном расстоянии от края пластины приводит к распространению рассеиваемой энергии вперед в конце профиля поля, что противоречит реальному физическому явлению. Поглощающий элемент не различает энергию, распространяющуюся вперед и в сторону. Чтобы минимизировать эту проблему, необходимо разместить поглощающий элемент подальше от края волновода так, чтобы амплитуда поля была достаточно малой и искусственные потери стали допустимыми. Несомненно, подходящее расположение поглощающего элемента зависит от конкретной задачи и

требуемой точности, но достаточно выбрать  $x_\alpha$ , чтобы амплитуда поля затухала примерно до  $10^{-3}$  от его значения на ребре волновода.

Другим важным фактором является величина поглотителя. Когда используется мощный поглощающий элемент при  $\alpha \gg 1$  это эквивалентно наложению граничных условий Дирихле нулевого поля в месте расположения этого элемента. В этом случае вообще не было бы смысла реализовывать поглощающий элемент, поскольку условия Дирихле гораздо проще. При выборе  $\alpha \approx 1$  необходимо найти компромисс между слишком интенсивным затуханием энергии, распространяющейся вперед (при этом  $x_\alpha$  должно быть довольно большим) и слишком малым затуханием энергии, распространяющейся в боковом направлении (при этом  $L_b - (D(z) + x_\alpha)$  должно быть большим). Как и в случае с расположением поглощающего элемента, соответствующая интенсивность его поглощения зависит от конкретной задачи, однако, удовлетворительные результаты получаются при использовании  $\alpha = 0.1$  в сочетании с достаточно широкой областью поглощения ( $> 2.5$  длины затухания поля в поперечном направлении).

## Метод распространения широкоугольного луча (BPM)

*Широкоугольное распространение луча с использованием аппроксимирующих операторов Паде.*

Начнем с рассмотрения скалярного уравнения Гельмгольца (4.2), полученного с помощью метода медленно меняющейся огибающей, записанного в виде [Ref. 4 \(на странице 61\)](#):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} - \frac{i}{2k} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = \frac{ik}{2} \hat{\mathcal{P}} \Phi,$$

где

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{k^2} (k_0^2 n^2 - k^2 + \nabla_{\perp}^2), \quad \nabla_{\perp}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Формально можно переписать уравнение (6.1) как

$$\left( 1 - \frac{i}{2k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{ik}{2} \hat{\mathcal{P}} \Phi$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left( \frac{1}{1 - \frac{i}{2k} \frac{\partial}{\partial z}} \frac{ik}{2} \hat{\mathcal{P}} \right) \Phi.$$

Хотя уравнение (6.3) в его нынешней форме малоприменимо, оно предполагает рекуррентную формулу

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \left( \frac{1}{1-\frac{i}{2k}} \left( \frac{1}{1-\frac{i}{2k}} \left( \frac{1}{1-\frac{i}{2k}} \left( \frac{1}{1-\frac{i}{2k}} \left( \frac{i\hat{k}\hat{P}}{2} \right) \right) \right) \right) \right) \frac{i\hat{k}\hat{P}}{2} \Phi.$$

Если отсечь непрерывную дробь (6.4), то получим дифференциальное выражение длягибающей поля в следующем виде

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = ik \frac{\hat{N}}{\hat{D}} \Phi,$$

где  $\hat{N}$  и  $\hat{D}$  многочлены в  $\hat{P}$ .

На следующем этапе сравним уравнение (6.5) с формальным решением уравнения (6.1). Если  $\hat{\mathbf{D}}$  обозначает  $\partial/\partial z$  в этом уравнении, то  $\partial^2/\partial z^2$  представлено как  $\hat{\mathbf{D}}^2$ .

$$(\hat{\mathbf{D}}^2 + i2k\hat{\mathbf{D}} + k^2\hat{P})\Phi = 0.$$

Оставляя в стороне тот факт, что  $\hat{\mathbf{D}}$  является дифференциальным оператором, то уравнение теперь можно рассматривать как квадратное уравнение, решаемое для  $\hat{\mathbf{D}}$ , что дает следующее формальное решение для уравнения первого порядка в  $z$  (выбираем соответствующий знак, чтобы задать распространение вперед):

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = ik \left( \sqrt{\hat{P}+1} - 1 \right) \Phi.$$

Если сравнить уравнение (6.5) с формальным решением уравнения (6.7), то станет ясно, что уравнение (6.5) содержит эффект  $(n, d)$  аппроксимации Паде для точного оператора Гельмгольца в уравнении (6.7), где  $n$  и  $d$  — высшие степени оператора  $\hat{P}$  в полиномах  $N$  и  $D$  соответственно. Уравнения в конечных разностях можно получить из уравнения (6.5), очистив знаменатель и

**Табл. 1. Паде-аппроксиманты**

$(n, d)$	$\hat{N}/\hat{D}$
$(1, 0)$	$\frac{\hat{P}}{2}$
$(1, 1)$	$\frac{\frac{\hat{P}}{2}}{1 + \frac{\hat{P}}{4}}$

**Табл. 1. Паде-аппроксиманты**

$(n, d)$	$\hat{N}/\hat{D}$
(2, 1)	$\frac{\frac{\hat{P}}{2} + \frac{\hat{P}^2}{8}}{1 + \frac{\hat{P}}{2}}$
(2, 2)	$\frac{\frac{\hat{P}}{2} + \frac{\hat{P}^2}{4}}{1 + \frac{3\hat{P}}{4} + \frac{\hat{P}^2}{16}}$
(3, 2)	$\frac{\frac{\hat{P}}{2} + \frac{3\hat{P}^2}{8} + \frac{\hat{P}^3}{32}}{1 + \hat{P} + \frac{3\hat{P}^2}{16}}$
(3, 3)	$\frac{\frac{\hat{P}}{2} + \frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{3\hat{P}^3}{32}}{1 + \frac{5\hat{P}}{4} + \frac{3\hat{P}^2}{8} + \frac{\hat{P}^3}{64}}$

с помощью центрирования относительно  $z$  обычным способом:

$$\hat{D}(\phi_m^{n+1} - \phi_m^n) = \Delta_z \frac{ik}{2} \hat{N}(\phi_m^{n+1} + \phi_m^n), \text{ or } (\hat{D} - \Delta_z \frac{ik}{2} \hat{N}) \phi_m^{n+1} = (\hat{D} + \Delta_z \frac{ik}{2} \hat{N}) \phi_m^n$$

Использование центрированного пространственного дифференцирования приводит к следующему виду для оператора  $\hat{P}$  для двумерного случая:

$$\hat{P}\phi_m = \frac{1}{k^2 \Delta_x^2} (\nu_m \phi_m + \phi_{m+1} + \phi_{m-1}),$$

где

$$\nu_m = \Delta_x^2 (k_0^2 n_m^2 - k^2) - 2$$

Высшие степени  $\hat{P}$  строятся путем повторяющегося применения уравнения (6.9).

$$\hat{P}^2 \phi_m = \frac{1}{k^4 \Delta_x^4} ([\nu_m^2 + 2] \phi_m + \phi_{m+2} + 2\nu_{m+1} \phi_{m+1} + 2\nu_{m-1} \phi_{m-1} + \phi_{m-2}).$$

$$\hat{P}^2 \phi_m = \frac{1}{k^6 \Delta_x^6} ([\nu_m^3 + 6\nu_m] \phi_m + \phi_{m+3} + 3\nu_{m+2} \phi_{m+2} + 3[\nu_{m+1}^2 + 1] \phi_{m+1} + 3[\nu_{m-1}^2 + 1] \phi_{m-1} + 3\nu_{m-2} \phi_{m-2} + \phi_{m-3}).$$

Из формы приведенных выше уравнений видно, что разностные уравнения, построенные с использованием  $(m, m)$  Аппроксимация Паде требует инверсии матрицы полосы пропускания  $2m+1$ . Также можно легко показать, что приведенные дифференциальные уравнения унитарны и, таким образом, сохраняют сумму квадратов абсолютных значений элементов вектора решения на каждом шаге. Однако следует отметить, что для широкоугольного распространения данная последняя величина уже не имеет интерпретации полной энергии пучка.

## Метод конечных разностей в частотной области (**FDFD**)

*В данном программном продукте метод конечных разностей в частотной области (**FDFD**) используется в двух случаях: для модального анализа и в случае выбора модального источника при анализе распространения. **FDFD** — это численный метод, позволяющий найти нормальные моды конструкций, таких как волноводы в отсутствие внешних источников возбуждения.*

Прежде всего, перепишем уравнения Максвелла в частотной области (2.2) для двумерного электромагнитного распространения. Предположим,  $\mu_r(\mathbf{r}, \omega) = 1$  и  $\epsilon_r(\mathbf{r}, \omega) = \epsilon_r(x, \omega)$ . Далее подавляем явную частотную зависимость. Таким образом, уравнение (2.2) для случая 2D ( $\partial_y \rightarrow 0$ ) имеет вид

$$\partial_x(\epsilon_r E_x) + \epsilon_r \partial_z E_z = 0,$$

$$\partial_z H_y = i\omega \epsilon_0 \epsilon_r E_x,$$

$$\partial_z H_z - \partial_z H_x = i\omega \epsilon_0 \epsilon_r E_y,$$

$$\partial_x H_y = -i\omega \epsilon_0 \epsilon_r E_z,$$

$$\partial_x H_x + \partial_z H_z = 0,$$

$$\partial_z E_y = -i\omega \mu_0 H_x,$$

$$\partial_x E_z - \partial_z E_x = -i\omega \mu_0 H_y,$$

$$\partial_x E_y = i\omega \mu_0 H_z.$$

Как видно из предыдущих уравнений, уравнения группируются в две несвязанные системы. А именно,

$$\partial_x(\epsilon_r E_x) + \epsilon_r \partial_z E_z = 0,$$

$$\partial_z H_y = i\omega \epsilon_0 \epsilon_r E_x,$$

$$\partial_x H_y = -i\omega \epsilon_0 \epsilon_r E_z,$$

$$\partial_x E_z - \partial_z E_x = -i\omega \mu_0 H_y,$$

и

$$\begin{aligned}\partial_x H_x + \partial_z H_z &= 0, \\ \partial_z E_y &= -i\omega\mu_0 H_x, \\ \partial_x E_y &= i\omega\mu_0 H_z, \\ \partial_z H_z - \partial_z H_x &= i\omega\epsilon_0\epsilon_r E_y\end{aligned}$$

Решение уравнений (11.2) называются поперечно магнитными (TM — Transverse Magnetic) модами, которые характеризуются  $E_x$ ,  $H_y$  и  $E_z$ . Решения уравнений (11.3) называются поперечно электрическими (TE — Transverse Electric) модами, которые характеризуются  $H_x$ ,  $E_y$  и  $H_z$ .

## TM-моды

Чтобы получить уравнение для главной компоненты TE-моды  $H_y$ , мы берем производную уравнения по  $z$  и производную уравнения по  $x$  и вставляем в уравнение. После перестановки членов, уравнения для TM-мод принимает вид

$$\partial_x(\epsilon_r^{-1}\partial_x H_y) + \epsilon_r^{-1}\partial_z^2 H_y + k_0^2 H_y = 0, \quad k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Принимаем  $z$ -зависимость модальных полей в следующей форме

$$H_y(x, z) = \mathcal{H}(x)e^{i\beta z}$$

Подставляем уравнение (11.5) в уравнение (11.4) и получаем

$$\frac{1}{k_0^2} \epsilon_r \partial_x (\epsilon_r^{-1} \partial_x \mathcal{H}_y) + \epsilon_r \mathcal{H}_y = \frac{\beta^2}{k_0^2} \mathcal{H}_y.$$

Дискретизированная на равномерной сетке форма (при  $x_0 = m \Delta_x$ ,  $x \in [0, L]$ ,  $\Delta_x = L/N$ ) уравнении (11.6) равна

$$\frac{1}{k_0^2 \Delta_x^2} \left[ \frac{2\epsilon_{r,m}}{\epsilon_{r,m} + \epsilon_{r,m-1}} \mathcal{H}_{y,m-1} - \left( \frac{2\epsilon_{r,m}}{\epsilon_{r,m} + \epsilon_{r,m-1}} + \frac{2\epsilon_{r,m}}{\epsilon_{r,m} + \epsilon_{r,m+1}} \right) \mathcal{H}_{y,m} + \frac{2\epsilon_{r,m}}{\epsilon_{r,m} + \epsilon_{r,m+1}} \mathcal{H}_{y,m+1} \right] + \epsilon_{r,m} \mathcal{H}_{y,m} = \frac{\beta^2}{k_0^2} \mathcal{H}_{y,m}$$

Далее перепишем уравнение (11.7) в матричной форме. Введем вектор-столбец компоненты вектора напряжения магнитного поля как  $y$

$$\mathbf{H}_y = (\mathcal{H}_{y,1} \quad \mathcal{H}_{y,2} \quad \dots \quad \mathcal{H}_{y,N})^T,$$

и

$$U = \begin{pmatrix} -(T_1^{(-)} + T_1^{(+)}) & T_1^{(+)} & \dots & 0 & 0 \\ T_2^{(-)} & -(T_2^{(-)} + T_2^{(+)}) & \dots & 0 & 0 \\ 0 & T_3^{(-)} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -(T_{N-1}^{(-)} + T_{N-1}^{(+)}) & T_{N-1}^{(+)} \\ 0 & 0 & \dots & T_N^{(-)} & -(T_N^{(-)} + T_N^{(+)}) \end{pmatrix}$$

где

$$T_m^{\pm} = \frac{2\epsilon_{r,m}}{\epsilon_{r,m\pm 1} + \epsilon_{r,m}}$$

Также принимаем, что  $\epsilon_{r,0} = \epsilon_{r,1}$  и  $\epsilon_{r,N-1} = \epsilon_{r,N}$ . Получаем следующие уравнения для собственных значений

$$\mathbf{P}\mathbf{H}_y = \frac{\beta^2}{k_0^2} \mathbf{H}_y$$

где

$$\mathbf{P} = \frac{1}{k_0^2 \Delta_x^2} \mathbf{U} + \boldsymbol{\epsilon}_r, \quad \boldsymbol{\epsilon}_r = \text{diag}(\epsilon_{r,1}, \epsilon_{r,2}, \dots, \epsilon_{r,N})$$

### TE-моды

Чтобы получить уравнение для главной компоненты TE-моды  $E_y$ , берем производную уравнения (11.3b) относительно  $z$  и производную уравнения (11.3c) относительно  $x$  и подставляем в уравнение (11.3d). После перестановки членов уравнение для TE-моды принимает вид

$$\partial_x^2 E_y + \partial_z^2 E_y + k_0^2 \epsilon_r E_y = 0.$$

Принимаем  $z$ -зависимость модальных полей в следующем виде

$$E_y(\mathbf{x}, z) = E_y(\mathbf{x}) e^{i\beta z}.$$

Подстановка уравнения (11.14) в уравнение (11.13) дает

$$\frac{1}{k_0^2} \partial_x^2 E_y + \epsilon_r E_y = \frac{\beta^2}{k_0^2} E_y$$

Дискретизированная на равномерной сетке форма уравнения (11.15) выглядит следующим образом

$$\frac{1}{k_0^2 \Delta_x^2} [\mathcal{E}_{y,m-1} - 2\mathcal{E}_{y,m} + \mathcal{E}_{y,m+1}] + \epsilon_r \mathcal{E}_{y,m} = \frac{\beta^2}{k_0^2} \mathcal{E}_{y,m}$$

Далее перепишем уравнение (11.16) в матричной форме. Введем вектор-столбец компоненты вектора напряжения электрического поля как  $\mathbf{y}$

$$\mathbf{E}_y = (\mathcal{E}_{y,1} \ \mathcal{E}_{y,2} \ \dots \ \mathcal{E}_{y,N})^T,$$

и

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Получаем следующие уравнения для собственных значений

$$\mathbf{Q}\mathbf{E}_y = \frac{\beta^2}{k_0^2} \mathbf{E}_y$$

где

$$\mathbf{Q} = \frac{1}{k_0^2 \Delta_x^2} \mathbf{V} + \boldsymbol{\epsilon}_r, \quad \boldsymbol{\epsilon}_r = \text{diag}(\epsilon_{r,1} \ \epsilon_{r,2} \ \dots \ \epsilon_{r,N})$$

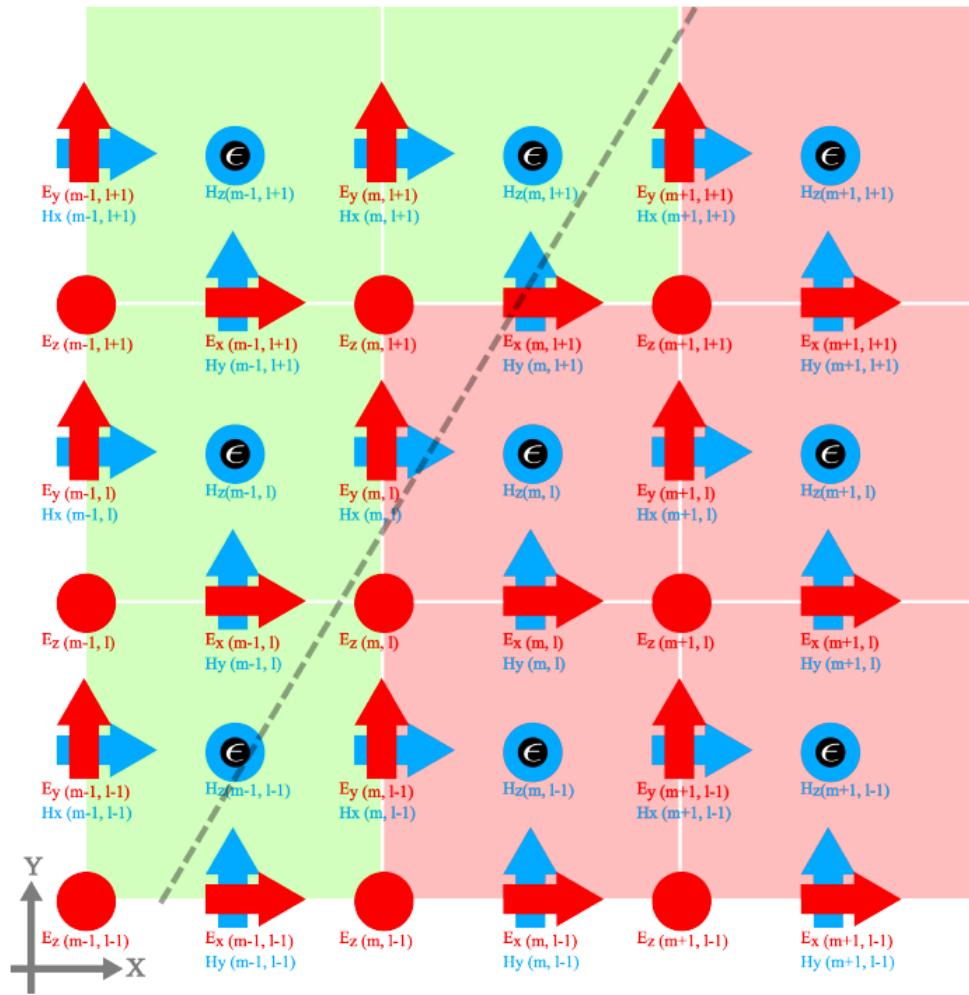
## Сетка Йи для 2D

Сетка Йи представлена на [Рисунке 1 \(на странице 46\)](#). Ячеистые сетки для электрических полей находятся на возможных разрывах диэлектрика. Поскольку все поперечные компоненты поля касаются границ элементарной ячейки, условия непрерывности выполняются автоматически.

Предположим, что поля имеют зависимость от  $\exp(-i(\omega t - \beta z))$ . Из уравнений ротора Максвелла (2.2) при  $\mu_r = 1$  и промасштабировав  $\mathbf{E}$  по сопротивлению свободного пространства  $Z = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ , получаем ([Ref. 3 \(на странице 61\)](#)):

Рис. 1.

Рисунок 1. 2D элементарная ячейка Йи.



$$ik_0 H_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} - i\beta E_y,$$

$$ik_0 H_y = i\beta E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x},$$

$$ik_0 H_z = \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y},$$

$$-ik_0 \varepsilon_r E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} - i\beta H_y,$$

$$-ik_0 \varepsilon_r E_y = i\beta H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x},$$

$$-ik_0 \varepsilon_r E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y},$$

Дискретизация уравнений (12.1) и (12.2) дает

$$\begin{aligned} ik_0 H_{x,m,l+\frac{1}{2}} &= \frac{E_{z,m,l+1} - E_{z,m,l}}{\Delta y} - i\beta E_{y,m,l+\frac{1}{2}}, \\ ik_0 H_{y,m+\frac{1}{2},l} &= i\beta E_{x,m+\frac{1}{2},l} - \frac{E_{z,m+1,l} - E_{z,m,l}}{\Delta x}, \\ ik_0 H_{z,m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} &= \frac{E_{y,m+1,l+\frac{1}{2}} - E_{y,m,l+\frac{1}{2}}}{\Delta x} - \frac{E_{x,m+\frac{1}{2},l+1} - E_{x,m+\frac{1}{2},l}}{\Delta y}, \\ -ik_0 \varepsilon_{rx,m+\frac{1}{2},l} E_{x,m+\frac{1}{2},l} &= \frac{H_{z,m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - H_{z,m+\frac{1}{2},l-\frac{1}{2}}}{\Delta y} - i\beta H_{y,m+\frac{1}{2},l}, \\ -ik_0 \varepsilon_{ry,m,l+\frac{1}{2}} E_{x,m,l+\frac{1}{2}} &= i\beta H_{x,m,l+\frac{1}{2}} - \frac{H_{z,m+\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}} - H_{z,m-\frac{1}{2},l+\frac{1}{2}}}{\Delta x}, \\ -ik_0 \varepsilon_{rz,m,l} E_{x,m,l} &= \frac{H_{y,m+\frac{1}{2},l} - H_{y,m-\frac{1}{2},l}}{\Delta x} - \frac{H_{x,m+\frac{1}{2},l} - H_{x,m-\frac{1}{2},l}}{\Delta y}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{rx,m+\frac{1}{2},l} &= \frac{\varepsilon_{r,m,l} + \varepsilon_{r,m,l-1}}{2}, \\ \varepsilon_{ry,m,l+\frac{1}{2}} &= \frac{\varepsilon_{r,m,l} + \varepsilon_{r,m-1,l}}{2}, \\ \varepsilon_{rz,m,l} &= \frac{\varepsilon_{r,m-1,l-1} + \varepsilon_{r,m-1,l} + \varepsilon_{r,m,l-1} + \varepsilon_{r,m,l}}{4}, \end{aligned}$$

Используя уравнения (12.5), мы аппроксимировали показатели преломления усреднением показателей преломления соседних ячеек.

Уравнения (12.3) и (12.4) можно записать в матричной форме как

$$\begin{aligned} ik_0 \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \\ \mathbf{H}_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -i\beta \mathbf{I} & \frac{\mathbf{U}_y}{\Delta y} \\ i\beta \mathbf{I} & 0 & -\frac{\mathbf{U}_x}{\Delta x} \\ -\frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} & \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \\ \mathbf{E}_z \end{pmatrix}, \\ ik_0 \begin{pmatrix} \varepsilon_{rx} & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_{ry} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{rz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \\ \mathbf{E}_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & -i\beta \mathbf{I} & \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} \\ i\beta \mathbf{I} & 0 & -\frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} \\ -\frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} & \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \\ \mathbf{H}_z \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

где

$$\mathbf{H}_x = \begin{vmatrix} H_{x,1,\frac{1}{2}} \\ H_{x,2,\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ H_{x,N_x,\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ H_{x,1,N_y+\frac{1}{2}} \\ H_{x,2,N_y+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ H_{x,N_x,N_y+\frac{1}{2}} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H}_y = \begin{vmatrix} H_{y,\frac{1}{2},1} \\ H_{y,\frac{1}{2},2} \\ \vdots \\ H_{y,N_x+\frac{1}{2},1} \\ \vdots \\ H_{y,\frac{1}{2},N_y} \\ H_{y,\frac{1}{2},N_y} \\ \vdots \\ H_{y,N_x+\frac{1}{2},N_y} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{H}_z = \begin{vmatrix} H_{z,\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\ H_{z,\frac{1}{2},2+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ H_{z,N_x+\frac{1}{2},\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ H_{z,\frac{1}{2},N_y+\frac{1}{2}} \\ H_{z,\frac{1}{2},N_y+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ H_{z,N_x+\frac{1}{2},N_y+\frac{1}{2}} \end{vmatrix},$$

и

$$\mathbf{E}_x = \begin{vmatrix} E_{x,\frac{1}{2},1} \\ E_{x,\frac{1}{2},2} \\ \vdots \\ E_{x,N_x+\frac{1}{2},1} \\ \vdots \\ E_{x,\frac{1}{2},N_y} \\ E_{x,\frac{1}{2},N_y} \\ \vdots \\ E_{x,N_x+\frac{1}{2},N_y} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{E}_y = \begin{vmatrix} E_{y,1,\frac{1}{2}} \\ E_{y,2,\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ E_{y,N_x+\frac{1}{2},1+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ E_{y,1,N_y+\frac{1}{2}} \\ E_{y,2,N_y+\frac{1}{2}} \\ \vdots \\ E_{y,N_x,N_y+\frac{1}{2}} \end{vmatrix}, \quad \mathbf{E}_z = \begin{vmatrix} E_{z,1,1} \\ E_{z,2,1} \\ \vdots \\ E_{z,N_x,1} \\ \vdots \\ E_{z,1,N_y} \\ E_{z,2,N_y} \\ \vdots \\ E_{z,N_x,N_y} \end{vmatrix},$$

и  $\mathbf{I}$  представляет собой квадратную единичную матрицу,  $\varepsilon_{rx}$ ,  $\varepsilon_{ry}$ , а также  $\varepsilon_{rz}$  диагональные матрицы, определяемые уравнениями (12.5). Матрицы  $\mathbf{U}_x$ ,  $\mathbf{U}_y$ ,  $\mathbf{V}_x$  и  $\mathbf{V}_y$  являются квадратными и зависят от граничных условий прямоугольного окна расчета. Например, когда для расчетной области выбрано граничное условие с нулевым значением, получаем

$$\mathbf{U}_x = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{U}_y = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & -1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{V}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{V}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & 0 & \dots & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Подставляя уравнение (12.6) в уравнение (12.7), получаем

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta^2}{k_0^2} - \left( \varepsilon_{rx} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_y}{\Delta y \Delta y} \right) & \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_x}{\Delta y \Delta x} & i \frac{\beta \mathbf{U}_x}{k_0^2 \Delta x} \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_y}{\Delta x \Delta y} & \frac{\beta^2}{k_0^2} - \left( \varepsilon_{ry} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_x}{\Delta x \Delta x} \right) & i \frac{\beta \mathbf{U}_y}{k_0^2 \Delta y} \\ i \frac{\beta \mathbf{V}_x}{k_0^2 \Delta x} & i \frac{\beta \mathbf{V}_y}{k_0^2 \Delta y} & - \left( \varepsilon_{rx} + \frac{1}{k_0^2} \left( \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_x}{\Delta x \Delta x} + \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_y}{\Delta y \Delta y} \right) \right) \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \\ \mathbf{E}_z \end{pmatrix} = 0.$$

В уравнении (12.12) сначала умножаем первую строку на  $\mathbf{V}_x / \Delta_x$ , вторую строку на  $\mathbf{V}_y / \Delta_y$  и третью строку на  $i\beta$  слева. Далее подставив первую и вторую строки к третьей строке, получим

$$\begin{vmatrix} \frac{\beta^2}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} - \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} \left( \varepsilon_{rx} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_y}{\Delta y \Delta y} \right) & \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_x}{\Delta y \Delta x} & i \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} \frac{\beta \mathbf{U}_x}{k_0^2 \Delta x} \\ \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_y}{\Delta x \Delta y} & \frac{\beta^2}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} - \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} \left( \varepsilon_{ry} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_x}{\Delta x \Delta x} \right) & i \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} \frac{\beta \mathbf{U}_y}{k_0^2 \Delta y} \\ - \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} \left( \varepsilon_{rx} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_y}{\Delta y \Delta y} \right) + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_y}{\Delta x \Delta y} & \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_x}{\Delta y \Delta x} - \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} \left( \varepsilon_{ry} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_x}{\Delta x \Delta x} \right) & -i\beta \varepsilon_{rz} \end{vmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \\ \mathbf{E}_z \end{pmatrix} = 0.$$

Из последней строки матричного уравнения (12.12) получаем поля в продольном сечении  $\mathbf{E}_z$  в качестве

$$\mathbf{E}_z = i \frac{1}{\beta} \varepsilon_{rz}^{-1} \left[ \left( - \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} \left( \varepsilon_{rx} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_y}{\Delta y \Delta y} \right) + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_y}{\Delta x \Delta y} \right) \mathbf{E}_x + \left( \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta x} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_x}{\Delta y \Delta x} - \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta y} \left( \varepsilon_{ry} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_x}{\Delta x \Delta x} \right) \right) \mathbf{E}_y \right].$$

Далее подставим уравнение (12.14) в уравнение (12.12) и получим уравнение для нахождения собственных значений в терминах распределения электрических полей в поперечном сечении:

$$P \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix} = \frac{\beta^2}{k_0^2} \begin{pmatrix} \mathbf{E}_x \\ \mathbf{E}_y \end{pmatrix},$$

где

$$\mathbf{P} := \begin{pmatrix} P_{xx} & P_{xy} \\ P_{yx} & P_{yy} \end{pmatrix},$$

$$P_{xx} := -\frac{1}{k_0^4} \frac{\mathbf{U}_x}{\Delta_x} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta_y} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_y}{\Delta_x \Delta_y} + \left( \mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{U}_x}{\Delta_x} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta_x} \right) \left( \varepsilon_{rx} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_y}{\Delta_y \Delta_y} \right),$$

$$P_{yy} := -\frac{1}{k_0^4} \frac{\mathbf{U}_y}{\Delta_y} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta_x} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_x}{\Delta_y \Delta_x} + \left( \mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{U}_y}{\Delta_y} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta_y} \right) \left( \varepsilon_{ry} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_x}{\Delta_x \Delta_x} \right),$$

$$P_{xy} := -\frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{U}_x}{\Delta_x} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta_y} \left( \varepsilon_{ry} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_x}{\Delta_x \Delta_x} \right) - \frac{1}{k_0^2} \left( \mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{U}_x}{\Delta_x} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta_x} \right) \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_x}{\Delta_y \Delta_x},$$

$$P_{yx} := -\frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{U}_y}{\Delta_y} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta_x} \left( \varepsilon_{rx} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_y}{\Delta_y \Delta_y} \right) - \frac{1}{k_0^2} \left( \mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{U}_y}{\Delta_y} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta_y} \right) \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_y}{\Delta_x \Delta_y},$$

В качестве альтернативы можно получить уравнение для нахождения собственных значений в терминах распределения магнитных полей в поперечном сечении:

$$\mathbf{Q} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \end{pmatrix} = \frac{\beta^2}{k_0^2} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_y \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{Q} := \begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} \\ Q_{yx} & Q_{yy} \end{pmatrix},$$

$$Q_{xx} := -\frac{1}{k_0^4} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta_x} \frac{\mathbf{U}_y \mathbf{U}_x}{\Delta_y \Delta_x} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{U}_y}{\Delta_y} + \left( \varepsilon_{ry} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_x}{\Delta_x \Delta_x} \right) \left( \mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{U}_y}{\Delta_y} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta_y} \right),$$

$$Q_{yy} := -\frac{1}{k_0^4} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta_y} \frac{\mathbf{U}_x \mathbf{U}_y}{\Delta_x \Delta_y} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{U}_x}{\Delta_x} + \left( \varepsilon_{rx} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_y}{\Delta_y \Delta_y} \right) \left( \mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{U}_x}{\Delta_x} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta_x} \right),$$

$$Q_{xy} := -\frac{1}{k_0^2} \left( \varepsilon_{ry} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_x}{\Delta_x \Delta_x} \right) \frac{\mathbf{U}_y}{\Delta_y} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta_x} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_x \mathbf{U}_y}{\Delta_x \Delta_y} \left( \mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{U}_x}{\Delta_x} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_x}{\Delta_x} \right),$$

$$Q_{yx} := -\frac{1}{k_0^2} \left( \varepsilon_{rx} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_y}{\Delta_y \Delta_y} \right) \frac{\mathbf{U}_x}{\Delta_x} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta_y} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{V}_y \mathbf{U}_x}{\Delta_y \Delta_x} \left( \mathbf{I} + \frac{1}{k_0^2} \frac{\mathbf{U}_y}{\Delta_y} \varepsilon_{rz}^{-1} \frac{\mathbf{V}_y}{\Delta_y} \right),$$

С верно заданными граничными условиями (например, граница с нулевым значением) можно получить  $\mathbf{V}_x = -\mathbf{U}_x^T$  и  $\mathbf{V}_y = -\mathbf{U}_y^T$ , где верхний индекс  $T$  обозначает операцию транспонирования. Тогда из уравнений (12.16) и (12.18) ясно, что

$$Q_{xx} = P_{yy}^T, \quad Q_{yy} = P_{xx}^T, \quad Q_{xy} = -P_{xy}^T, \quad Q_{yx} = -P_{yx}^T.$$

Одним из преимуществ данного подхода является то, что поскольку получены  $\mathbf{E}_t$  и  $\mathbf{H}_t$  все остальные компоненты поля легко получаются с помощью уравнений (12.14), (12.6) и (12.7).

## Метод конечных разностей во временной области (FDTD)

*Реализация метода для 3D представлена далее.*

Метод FDTD — это подход, который напрямую решает уравнения Максвелла путем правильной дискретизации как временной, так и пространственной областей. Определяющие уравнения Максвелла для однородной и недисперсионной среды записываются как

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mu_r \mathbf{H}$$

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

где  $\epsilon_r$ ,  $\mu_r$ ,  $\sigma$  не зависят от пространственных и временных переменных, а также

$\mathbf{j}$  — вектор плотности тока проводящей среды. Подставив уравнения (13.1, 13.2, 13.3) в уравнение (1.1), получим

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{E} + \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\frac{\sigma}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \mathbf{E}$$

Приведенные выше уравнения выражаются в центрированных разностных формах как

$$\frac{\mathbf{E}^n - \mathbf{E}^{n-1}}{\Delta t} = -\frac{\sigma}{\epsilon_0 \epsilon_r} \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} + \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon_r} \nabla \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} - \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}}}{\Delta t} = -\frac{1}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^n$$

где  $t = (n-1) \Delta_t$  с  $\Delta_t$  представляет приращение во времени. Поскольку центрированные разностные точки для электрического поля  $\mathbf{E}$  взяты при  $n-1$  и  $n$ ,  $\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}}$  в уравнении (13.6) аппроксимируется выражением

$$\sigma \mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} \approx \sigma \frac{\mathbf{E}^{n-\frac{1}{2}} + \mathbf{E}^n}{2}$$

При решении уравнений (13.6) и (13.7) получаем выражения для  $\mathbf{E}^n$  и  $\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}}$  в качестве

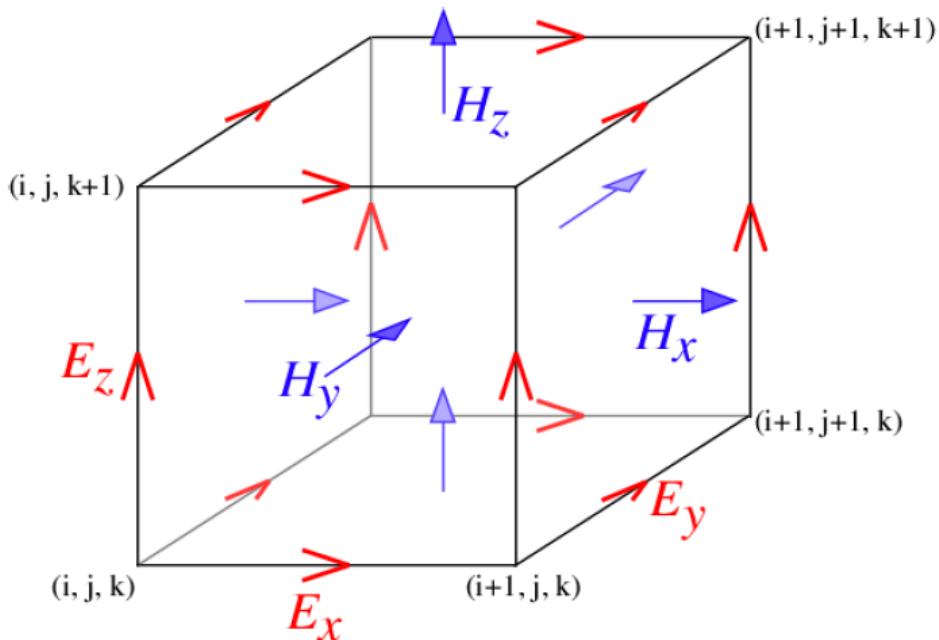
$$\mathbf{E}^n = -\frac{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \epsilon_0 \epsilon_r}}{1 - \frac{\sigma \Delta_t}{2 \epsilon_0 \epsilon_r}} \mathbf{E}^{n-1} + \frac{\frac{\sigma \Delta_t}{\epsilon_0 \epsilon_r}}{1 + \frac{\sigma \Delta_t}{2 \epsilon_0 \epsilon_r}} \nabla \times \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}},$$

$$\mathbf{H}^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{H}^{n-\frac{1}{2}} - \frac{\Delta t}{\mu_0 \mu_r} \nabla \times \mathbf{E}^n$$

## Сетка Йи для 3D

Рис. 2.

Рисунок 2. 3D элементарная ячейка Йи.



Для системы Уравнений (13.9) и (13.10) Йи предложил схему чехарды с использованием кубической ячейки, как показано на [Рисунке 2 \(на странице 52\)](#). Компоненты электрического и магнитного поля расположены по краям и на поверхности ячейки соответственно и смешены на полшага как в пространстве, так и во времени.

Конечно-разностные уравнения для компонентов электрического поля получаются в виде

$$E_x^{n+\frac{1}{2}, j, k} = C_{ex,i+\frac{1}{2},j,k} E_x^{n-1, i+\frac{1}{2}, j, k} + C_{exh,i+\frac{1}{2},j,k} \left[ \frac{1}{\Delta y} \left( H_z^{n-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}, j+1, k} - H_z^{n-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}, j-1, k} \right) - \frac{1}{\Delta z} \left( H_y^{n-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}, j, k+1} - H_y^{n-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}, j, k-1} \right) \right],$$

для  $i = 1, N_x - 1, j = 2, N_y - 1, k = 2, N_z - 1$

где

$$C_{ex,i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta_t}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i+\frac{1}{2},j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta_t}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i+\frac{1}{2},j,k}}}$$

$$C_{exh,i+\frac{1}{2},j,k} = \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i+\frac{1}{2},j,k}}}{1 + \frac{\sigma_{i+\frac{1}{2},j,k} \Delta_t}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i+\frac{1}{2},j,k}}}$$

$$E_y^n_{i,j+\frac{1}{2},k} = C_{ey,i,j+\frac{1}{2},k} E_y^{n-1}_{i,j+\frac{1}{2},k} + C_{eyh,i,j+\frac{1}{2},k} \left[ \frac{1}{\Delta_z} \left( H_x^{n-\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - H_x^{n-\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k-1} \right) - \frac{1}{\Delta_x} \left( H_z^{n-\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} - H_z^{n-\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j+\frac{1}{2},k} \right) \right],$$

для  $i = 2, N_x - 1, j = 1, N_y - 1, k = 2, N_z - 1$

где

$$C_{ey,i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k} \Delta_t}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i,j+\frac{1}{2},k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k} \Delta_t}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i,j+\frac{1}{2},k}}}$$

$$C_{eyh,i,j+\frac{1}{2},k} = \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i,j+\frac{1}{2},k}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j+\frac{1}{2},k} \Delta_t}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i,j+\frac{1}{2},k}}}$$

$$E_z^n_{i,j,k+\frac{1}{2}} = C_{ez,i,j,k+\frac{1}{2}} E_z^{n-1}_{i,j,k+\frac{1}{2}} + C_{ezh,i,j,k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\Delta_x} \left( H_y^{n-\frac{1}{2}}_{i,j+\frac{1}{2},k+1} - H_y^{n-\frac{1}{2}}_{i,j-\frac{1}{2},k+1} \right) - \frac{1}{\Delta_y} \left( H_x^{n-\frac{1}{2}}_{i+\frac{1}{2},j,k+1} - H_x^{n-\frac{1}{2}}_{i-\frac{1}{2},j,k+1} \right) \right],$$

для  $i = 2, N_x - 1, j = 2, N_y - 1, k = 1, N_z - 1$

где

$$C_{ez,i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{\sigma_{i,j,k+\frac{1}{2}} \Delta_t}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i,j,k+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k+\frac{1}{2}} \Delta_t}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i,j,k+\frac{1}{2}}}}$$

$$C_{ezh,i,j,k+\frac{1}{2}} = \frac{\frac{\Delta_t}{\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i,j,k+\frac{1}{2}}}}{1 + \frac{\sigma_{i,j,k+\frac{1}{2}} \Delta_t}{2\varepsilon_0 \varepsilon_{r,i,j,k+\frac{1}{2}}}}$$

Конечно-разностные уравнения для компонентов напряженности магнитного поля получаются в виде

$$H_x^{n+\frac{1}{2}, i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = H_x^{n-\frac{1}{2}, i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - C_{hxe}^{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\Delta y} \left( E_z^n_{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} - E_z^n_{i, j, k+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{\Delta z} \left( E_y^n_{i, j+\frac{1}{2}, k+1} - E_y^n_{i, j+\frac{1}{2}, k} \right) \right],$$

для  $i = 2, N_x - 1, j = 1, N_y - 1, k = 1, N_z - 1$

где

$$C_{hxe}^{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta_t}{\mu_0 \mu_r^{i, j+\frac{1}{2}, k+\frac{1}{2}}}$$

$$H_y^{n+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} = H_y^{n-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} - C_{hye}^{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{\Delta z} \left( E_y^n_{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} - E_z^n_{i, j, k+\frac{1}{2}} \right) - \frac{1}{\Delta z} \left( E_y^n_{i, j+\frac{1}{2}, k+1} - E_y^n_{i, j+\frac{1}{2}, k} \right) \right],$$

для  $i = 1, N_x - 1, j = 2, N_y - 1, k = 1, N_z - 1$

где

$$C_{hye}^{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}} = \frac{\Delta_t}{\mu_0 \mu_r^{i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}}}$$

$$H_z^{n+\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = H_z^{n-\frac{1}{2}, i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} - C_{hze}^{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} \left[ \frac{1}{\Delta x} \left( E_y^n_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} - E_y^n_{i, j+\frac{1}{2}, k} \right) - \frac{1}{\Delta y} \left( E_x^n_{i+\frac{1}{2}, j+1, k} - E_y^n_{i+\frac{1}{2}, j, k} \right) \right],$$

для  $i = 1, N_x - 1, j = 1, N_y - 1, k = 2, N_z - 1$

где

$$C_{hze}^{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k} = \frac{\Delta_t}{\mu_0 \mu_r^{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}, k}}$$

Размер шага по времени  $\Delta_t$  должен удовлетворять следующему условию Куранта, чтобы гарантировать численную устойчивость:

$$c \Delta_t = \sqrt{\left(\frac{1}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta y}\right)^2 + \left(\frac{1}{\Delta z}\right)^2}$$

где  $c$  скорость света.

Границное условие ПОГЛОЩЕНИЯ

Чтобы избежать нежелательных (нефизических) отражений на границе расчетной области следует задать допустимое граничное условие поглощения (ABC). Самое популярное граничное условие ABC в методе FDTD — это условие Мура.

Условие Мура будет описываться с помощью одностороннего волнового уравнения для  $E_y$ , распространяемого в  $-x$  направлении. Поглащающая граница расположена при  $x=0$ . Электрическое поле  $E_y$ , распространяющееся в отрицательном направлении  $x$  со скоростью  $V_x$  записывается уравнением

$$E_y = E_y(x + V_x t), \quad V_x = \frac{\omega}{\beta_x},$$

где  $\beta_x$  постоянная распространения в  $x$  направлении.  $E_y$  удовлетворяет следующему отношению

$$\frac{\partial E_y}{\partial t} = V_x \frac{\partial E_y}{\partial x}.$$

Это выражение одностороннего волнового уравнения. Поскольку отсутствует физическая граница при  $x=0$ , хотя существует граница расчетной области, уравнение (14.2) должно удовлетворяться при  $x=0$ . При дискретизации уравнения (14.2) получаем

$$\begin{aligned} \frac{E_y^n_{\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}, k} - E_y^{n-1}_{\frac{3}{2}, j+\frac{1}{2}, k}}{\Delta_t} &= V_x \frac{E_y^{n-\frac{1}{2}}_{2, j+\frac{1}{2}, k} - E_y^{n-\frac{1}{2}}_{1, j+\frac{1}{2}, k}}{\Delta_x}, \\ \frac{E_y^n_{1, j+\frac{1}{2}, k} - E_y^n_{2, j+\frac{1}{2}, k}}{2} - \frac{E_y^{n-1}_{1, j+\frac{1}{2}, k} - E_y^{n-1}_{2, j+\frac{1}{2}, k}}{2} &= V_x \frac{E_y^{n-\frac{1}{2}}_{2, j+\frac{1}{2}, k} - E_y^n_{2, j+\frac{1}{2}, k}}{2} - \frac{E_y^{n-\frac{1}{2}}_{1, j+\frac{1}{2}, k} - E_y^n_{1, j+\frac{1}{2}, k}}{2}, \\ E_y^n_{1, j+\frac{1}{2}, k} &= E_y^{n-1}_{2, j+\frac{1}{2}, k} + \frac{V_x \Delta_t - \Delta_x}{V_x \Delta_t + \Delta_x} \left( E_y^n_{2, j+\frac{1}{2}, k} - E_y^{n-1}_{1, j+\frac{1}{2}, k} \right), \quad \text{for } j = \overline{2, N_y - 2}, k = \overline{2, N_z - 1} \end{aligned}$$

ABC для  $E_z$  при  $x=0$  имеет вид

$$E_z^n_{1, j, k+\frac{1}{2}} = E_z^{n-1}_{2, j, k+\frac{1}{2}} + \frac{V_x \Delta_t - \Delta_x}{V_x \Delta_t + \Delta_x} \left( E_z^n_{2, j, k+\frac{1}{2}} - E_z^{n-1}_{1, j, k+\frac{1}{2}} \right), \quad \text{for } j = \overline{2, N_y - 1}, k = \overline{2, N_z - 2}$$

ABC для  $E_y$  и  $E_z$  при  $x=D_x=N_x \Delta_x$  определяются аналогичным образом как

$$\begin{aligned} E_y^n_{N_x, j+\frac{1}{2}, k} &= E_y^{n-1}_{N_x-1, j+\frac{1}{2}, k} + \frac{V_x \Delta_t - \Delta_x}{V_x \Delta_t + \Delta_x} \left( E_y^n_{N_x-1, j+\frac{1}{2}, k} - E_y^{n-1}_{N_x, j+\frac{1}{2}, k} \right), \quad \text{for } j = \overline{2, N_y - 2}, k = \overline{2, N_z - 1} \\ E_z^n_{N_x, j, k+\frac{1}{2}} &= E_z^{n-1}_{N_x-1, j, k+\frac{1}{2}} + \frac{V_x \Delta_t - \Delta_x}{V_x \Delta_t + \Delta_x} \left( E_z^n_{N_x-1, j, k+\frac{1}{2}} - E_z^{n-1}_{N_x, j, k+\frac{1}{2}} \right), \quad \text{for } j = \overline{2, N_y - 1}, k = \overline{2, N_z - 2} \end{aligned}$$

Условие ABC Мура подавляет нормально падающую волну с высокой точностью. Однако для наклонно падающих волн могут быть большие отражения.

## Источники

*В данной главе представлено описание типов источников, доступных в этом программном решении.*

### Гауссов пучок

Гауссов пучок — пучок электромагнитного излучения, в котором распределение электрического поля в поперечном сечении хорошо аппроксимируется функцией Гаусса.

Для описания Гауссова пучка используют два термина, которые коррелируют с параметрами Гауссова распределения в статистике:

- Перетяжка (  $w_0$  ) — это место вдоль оси распространения, где площадь поперечного сечения луча минимальна и, следовательно, интенсивность самая высокая. Перетяжка пучка коррелирует с среднеквадратичным распределением.



#### Прим.:

Почему не используется «стандартное отклонение»: в оптике перетяжка луча является более прямой и практической мерой. Он напрямую связан с размером луча, который является важнейшим параметром при проектировании оптических систем. Использование стандартного отклонения было бы менее интуитивно понятным для этих практических приложений.

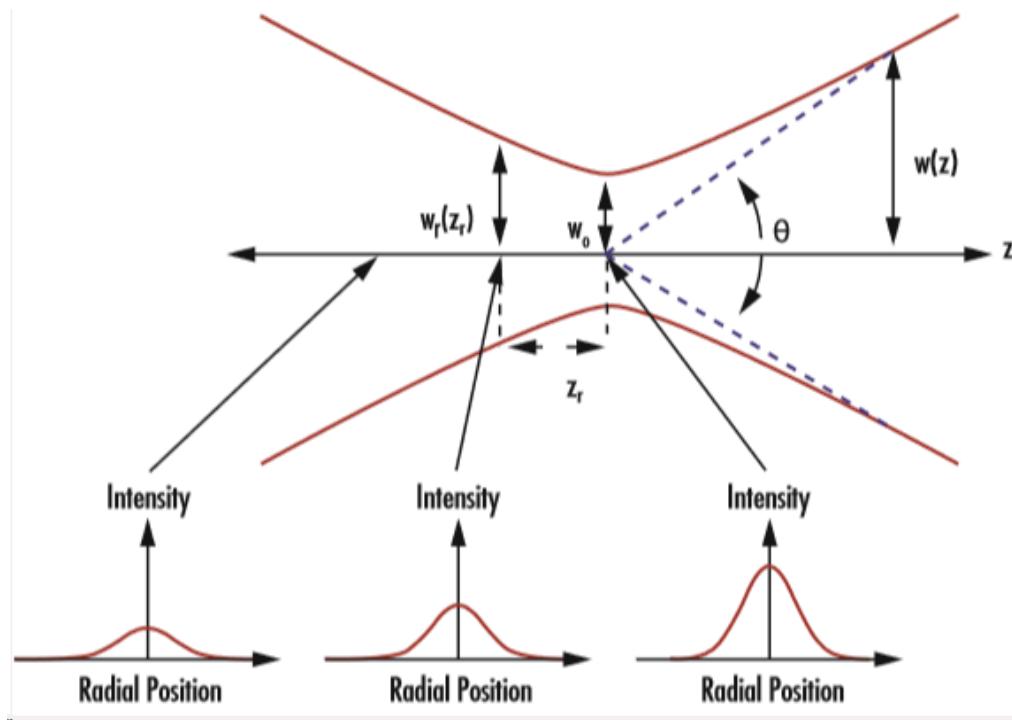
- Смещение (axial distance) - расстояние от точки фокуса до плоскости (линии) источника вдоль оси распространения. В лазерной оптике, термин «смещение» больше описывает физическое смещение луча от базовой оси или точки.



#### Прим.:

«Среднее значение» (математическое ожидание и другие названия) не совсем отражает эту концепцию физического смещения, поскольку среднее значение идеально симметричного гауссова луча всегда будет в центре луча, что делает его менее информативным как параметр.

Рис. 3. Рисунок 3. Радиус перетяжки пучка  $w(z)$  как функция  $z$ .  $w_0$ : минимальный радиус перетяжки пучка;  $zR$ : длина Рэлея;  $\theta$ : угол расходимости.



$$E(r, z) = E_0 \frac{w_0}{w(z)} e\left(\frac{r^2}{w(z)^2}\right) e^{-i\left(kz + k \frac{r^2}{2R(z)}\right)}$$

где  $r$  — радиус, измеряемый от оси распространения,  $z$  смещение;  $w_0$  минимальный диаметр перетяжки пучка;  $w(z=0)$ ,  $\lambda$  длина волны;  $k$  волновое число;  $E_0$  комплексное значение электрического поля в начале источника;  $w(z)$  радиус перетяжки пучка, при котором амплитуда электрического поля падает на  $1/e$  от фактических значений;  $R(z)$  радиус кривизны волнового фронта на расстоянии  $z$

Радиус перетяжки на расстоянии  $z$  :

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{\lambda z}{\pi w_0^2}\right)^2}$$

Волновое число,  $k$  :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Радиус кривизны волнового фронта в  $z$  :

$$R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{z_R}{z} \right)^2 \right]$$

Длина Рэлея:

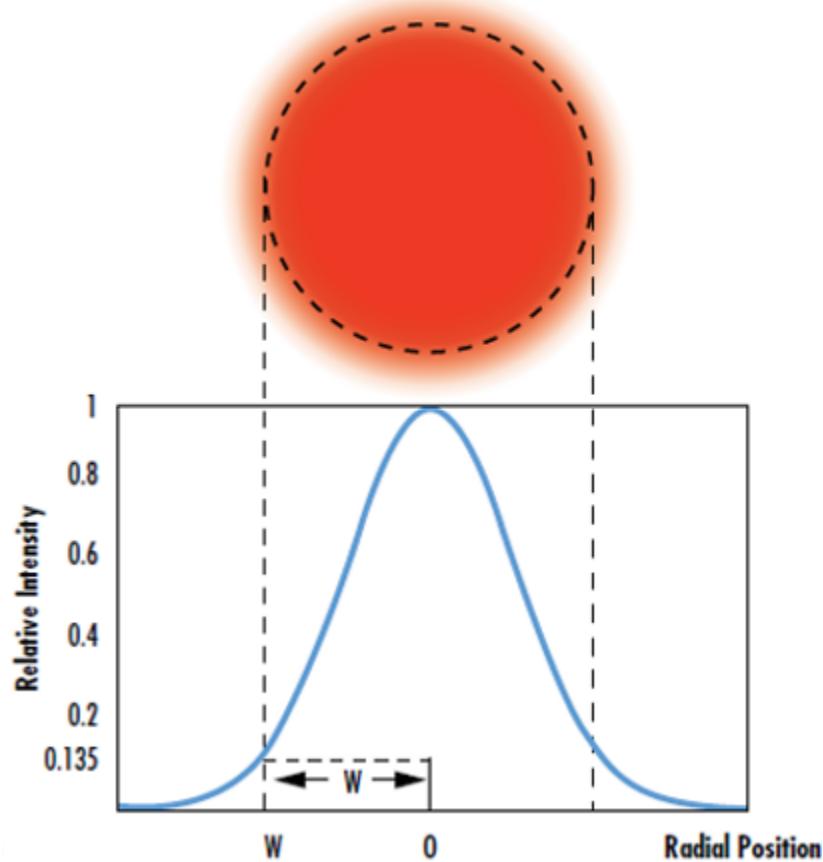
$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$$

Угол расходимости:

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi w_0}$$

Длина Рэлея показывает, когда радиус кривизны волнового фронта достигает минимального значения. До и после нее радиус кривизны волнового фронта стремится к бесконечности.

Рис. 4. Рисунок 4. **Перетяжка гауссова луча определяется как место, где интенсивность излучения составляет  $1/e^2$  (13.5%) от максимального значения.**



## Настройки сетки

В OPTICS SIM реализовано два способа задания структурированной сетки:

- **С учетом длины волны**

Используется алгоритм Чернышова, который определяет количество узлов сетки из длины волны. Поддерживается только для BPM и FDTD.

- **С учетом размера ячейки**

Вручную задается расстояние между узлами сетки для каждого из направлений.



### Прим.:

Структурированная сетка — это сетка, у которой ячейки состоят из элементов регулярной формы с четырьмя угловыми точками по узлам в двух измерениях, либо из гексаэдральных элементов с восемью угловыми точками по узлам в трех измерениях.

## Результаты

В программном продукте *OPTICS SIM* отдельно выделены этапы сборки и обработки данных.

### Сбор данных

Пользователь устанавливает мониторы в интересующих его местах, чтобы собрать данные только в них. Результаты во всех остальных сеточных узлах удаляются из оперативной памяти по окончании расчета. Монитор - точка, линия, плоскость или объем помечает массив узлов сетки, в которых будут сохранены значения выбранного пользователем параметра. Монитор задается перед запуском на расчет.

### Обработка данных

Пользователь создает таблицы, строит графики кривых и графики пространственного распределения, используя данные, собранные с помощью мониторов.

### Виды мониторов

- **Частотные мониторы**

Сохраняют данные в частотной области, либо сразу, либо с помощью Дискретного преобразования Фурье, в зависимости от численного метода.

- **Мониторы временной области**

Сохраняют данные во временной области.

- **Монитор мод**

Позволяет выполнить модовый анализ, т.е. найти стабильные состояния электромагнитного поля в сечении структуры, т.е. моды.



#### Прим.:

Монитор мод позволяет отображать таблицы помимо графиков пространственного распределения. Таблицы могут содержать номер моды, ее эффективный коэффициент преломления ( $n_{eff}$ ), длину волны, потери, групповой индекс и т.д.

## Список литературы

1. R. Scarmozzino and R. M. Osgood. Comparison of finite-difference and Fourier-transform solutions of the parabolic wave equation with emphasis on integrated-optics applications. *Journal of the Optical Society of America A*, 8(5):724, May 1991.
2. Junji Yamauchi, Jun Shibayama, and Hisamatsu Nakano. Application of the generalized Douglas scheme to optical waveguide analysis. *Optical and Quantum Electronics*, 31(9/10):675–687, 1999.
3. Zhaoming Zhu and Thomas Brown. Полновекторный анализ микроструктурированных оптических волокон методом конечных разностей. *Optics Express*, 10(17):853, August 2002.
4. G. Ronald Hadley. Wide-angle beam propagation using Pad'e approximant operators. *Optics Letters*, 17(20):1426, October 1992.